Прикольное моделирование



Ярослав Золотарев

Ярослав Золотарёв

Прикольное моделирование

https://litres.ru/74750137
SelfPub; 2026

Аннотация

Сколько карасей вместит пруд, почему не бывает великанов и как из-за фунтов вместо ньютонов потеряли аппарат у Марса? На даче у Петровича всё это можно посчитать. Студентка Даша строит модели, тёща ведёт тетрадь, зять предсказывает «на глаз», а сосед Кузьмич на всё отвечает: «Хаос». В 37 главах — рост и пределы, хаос и эффект бабочки, хищники и жертвы, эпидемии и слухи, очереди и запасы, метод Монте-Карло, линейное программирование, теория игр, подгонка и проверка моделей, знаменитые провалы и самосбывающиеся прогнозы. Каждый метод назван своим научным именем, разобран на числах и проверен в обычной таблице, а в конце главы честно показано, где он ломается и где работает всерьёз. Продолжение «Прикольной статистики», но читается и само по себе.

Содержание

Глава 1. Карта не территория 5
Сферическая корова и тетрадь тёщи 8
Как модель подводит 13
Где это работает всерьёз 15
Задачи 19
Глава 2. Какой бывает модель 22
Пять вопросов к модели 24
Как выбор породы подводит 29
Где это работает всерьёз 31
Задачи 35
Глава 3. Почему не бывает великанов 38
Квадрат против куба 40
Как метод ломается 45
Где это работает всерьёз 47
Задачи 51
Глава 4. Сколько картошки съест товарищество 54
Пять минут против недели 56
Как метод ломается 61
Где это работает всерьёз 63
Задачи 66
Глава 5. Было, прибавилось, стало 69
Состояние, шаг, параметр 71
Кузьмич и равновесие 74

Кролики с памятью 76
Как метод ломается 80
Где это работает всерьёз 83
Задачи 86
Глава 6. Ряска в пруду 89
Умножать, а не прибавлять 91
Время удвоения 93
Как метод ломается 97
Где это работает всерьёз 99
Задачи 102
Глава 9. Сколько карасей можно ловить 130
Квота в штуках 132
Квота в долях 134
Конец ознакомительного фрагмента. 137

Ярослав Золотарёв
Прикольное моделирование

Глава 1. Карта не территория

Даша приехала на дачу в пятницу вечером, с рюкзаком и ноутбуком. Даша внучка Петровича, дочь зятя, учится на втором курсе прикладной математики и рассказывает об этом всем, кто не успел уйти. Тёщу Петровича она зовёт прабабушкой, и та этим званием гордится и пользуется: прабабушке, как известно, не возражают.

За ужином выяснилось, что главный предмет у Даши в этом году называется «математическое моделирование». Тёща переспросила: моделирование чего, платьев? Даша ответила, что моделировать можно что угодно, и в доказательство за пять минут нарисовала на тетрадном листе план участка. Прямоугольник шести соток, квадратик бани, кружок колодца, три кружка яблонь, полоса картошки.

Тёща взяла лист и стала читать его, как прокурор читает протокол. Где смородина? Где бочка под водостоком? Где компостная куча, теплица, лавочка, на которой сидит Кузьмич, когда приходит давать советы? Где, наконец, берёза

Кузьмича, которая растёт с его стороны забора, а тень от неё падает на нашу? Это не план, сказала тёща, это геометрия какая-то. Нарисуй как есть.

Даша честно добавила смородину, бочку и лавочку. Тёща потребовала каждый куст отдельно, потому что смородина у неё трёх сортов. Потом грядки по культурам. Потом камень у калитки, о который все спотыкаются с 1987 года. К полуночи лист был закрашен целиком, разобрать на нём уже ничего было нельзя, а тёща всё находила, чего не хватает. Петрович, который до сих пор молча пил чай, спросил: а план-то вообще зачем?

Вопрос прозвучал, и он главный в этой книге. Бывает ли правильный план, такой, на котором всё как есть?

Петрович сам и ответил, потому что спрашивал не ради разговора. Весной он собирается ставить вторую теплицу и думает куда. Для этого ему нужны размеры свободных мест, расстояния до забора и, главное, тени. Сорта смородины ему не нужны. Камень у калитки не нужен. А берёза Кузьмича нужна позарез, хотя растёт на чужой земле: в июне её тень ложится аккурат на то место, которое Петрович присмотрел.

Тёщин план «как есть» на этот вопрос ответить не может, хотя на нём есть всё. Точнее, именно потому, что на нём есть всё. Нужное утонуло в ненужном, а теней там так и не нарисовали: тень не предмет, и тёща её за имущество не считает. Первый план Даши, с прямоугольниками, был гораздо ближе к делу. Ему не хватало только берёзы и солнца.

Здравый смысл тут приходит к важному выводу без всякой науки. Правильного плана вообще не бывает, бывает план, годный для дела. Для теплицы нужен один. Для водопровода другой: там важны трубы и уклон, а яблони нет. Для продажи участка третий: там важна площадь, а камень у калитки покупателю показывать не обязательно. Один и тот же участок, три разных честных плана.

А план «всё как есть» довели до конца ещё в XIX веке, правда, в сказке. В романе Льюиса Кэрролла «Сильвия и Бруно. Окончание» (1893) чудаковатый гость по имени Майн Херр рассказывает, как в его стране сделали карту в масштабе миля к миле. Развернуть её так и не дали: фермеры возражали, что карта закроет всю землю и не пустит солнце. Поэтому, добавляет он, теперь там пользуются самой страной как её собственной картой, и выходит почти так же хорошо. В 1946 году Хорхе Луис Борхес написал об этом же коротенький рассказ «О строгости в науке». Там империя сделала карту размером с империю, а потомки сочли её бесполезной и бросили истлевать в пустыне. Тёще до них оставалось немного: ещё пара кустов, и план можно было бы стелить прямо на грядки.

Сферическая корова и тетрадь тёщи

Теперь назовём всё научными словами. То, что рисовала Даша, называется моделью (model). Модель это упрощённое представление объекта, которое сохраняет важные для поставленной цели свойства и отбрасывает остальные. Сам объект называют оригиналом, а отбрасывание лишнего абстрагированием (abstraction). Каждое решение «это не важно» называется допущением (assumption). Даша приняла допущение, что сорта смородины для теплицы не важны, и была права. Если модель достаточно хорошо отвечает на свой вопрос, её называют адекватной (adequate). Адекватность всегда оценивают по отношению к цели, а не вообще.

Отсюда первое правило моделирования: прежде чем строить модель, сформулируйте вопрос. Без вопроса не понять, что можно выбросить, и получается тёщин план.

Физики любят посмеяться над этим в старом анекдоте. Фермер просит учёного выяснить, почему коровы мало дают молока. Учёный долго считает и приходит с докладом, который начинается словами: «Рассмотрим сферическую корову в вакууме». С тех пор сферическая корова (spherical cow) означает упрощение, доведённое до смешного. Только смешно оно не всегда. Если вопрос в том, как быстро корова теряет тепло зимой, шар вполне годится: тепло уходит через поверхность, и шар грубо, но верно передаёт, сколько у ко-

ровы поверхности на килограмм веса. К этой мысли мы вернёмся в третьей главе, где выяснится, почему не бывает великанов. Если же вопрос про надои, шар бесполезен. Упрощение бывает не глупым или умным, а подходящим для вопроса или нет.

Модели делают из чего угодно: из картона, как макет дома, из глины, из слов, как тёщины приметы. В этой книге главными будут математические модели (mathematical model), где оригинал описан числами и связями между ними. Самую простую из них Даша нашла в тёщиной же тетради.

Тёща давно записывает, сколько картошки посажено и сколько выкопано. И давно знает правило, слышанное ещё от своей бабушки: картошка родится сам-восемь. Это старинная мера урожая: «сам-пят» или «сам-восемь» значило, что собрано в пять или в восемь раз больше, чем посажено. Даша объявила, что прабабушка всю жизнь пользуется математической моделью, и записала её так: урожай = 8 · посажено. Тёща обиделась на слово «модель», но формулу признала.

Проверим её по тетради, числа условные. За пять лет было посажено 20, 25, 30, 30 и 35 килограммов, выкопано 170, 190, 250, 210 и 290. Модель обещала 160, 200, 240, 240 и 280. Расхождения такие: плюс 10, минус 10, плюс 10, минус 30, плюс 10. Про четвёртый год, когда урожай не дотянул, тёща сказала, что тут модель и соврала. Даша напомнила, что в тот год было сухое лето и колорадский жук, а про них модель ничего не обещала.

Вот главная формула главы, а заодно и всей науки о моделях.

Формула 1. Данные = модель + остаток

$$y = f(x) + e$$

урожай = 8 · посажено + остаток

модель «сам-восемь», параметр 8; числа тёщиной тетради условные

Год	Посажено x, кг	Выкопано y, кг	Модель 8x, кг	Остаток e, кг
1	20	170	160	+10
2	25	190	200	-10
3	30	250	240	+10
4	30	210	240	-30
5	35	290	280	+10
Всего	**140**	**1110**	**1120**	**-10**

Остатки по годам: прыгают вверх и вниз, ничего повторяющегося



Сумма квадратов остатков: при параметре 7 равна 4750, при 8 равна 1300, при 9 равна 5950.
Наилучший параметр по этим пяти годам 7,93: бабушка тёщи округлила правильно.

Данные складываются из двух частей. Модель описывает то, что повторяется из года в год. Остаток (residual) собирает всё, чего модель не учла: погоду, жука, соседских кур и то, что в одном году сажала тёща, а в другом зять. В учебниках это пишут так: y = f(x) + e. Здесь x входная пере-

менная (input variable), y выходная (output variable), f сама модель, а e остаток, или ошибка. Число 8 называется параметром (parameter): это постоянная, которую подбирают под конкретный участок. У Кузьмича, чьи грядки полдня стоят в тени той же берёзы, он вполне может оказаться шестью.

Модель хороша не тогда, когда остатков нет, а когда в них не осталось ничего повторяющегося. У тёщиной модели остатки прыгают то вверх, то вниз и в сумме дают минус 10 на 1110 выкопанных килограммов: правило сам-восемь работает. Если бы остатки год за годом были положительными, это означало бы, что участок родит лучше восьми и параметр пора поправить. Как подбирать параметры по данным, мы разберём в тридцать третьей главе. Пока скажем только, что наилучший параметр для этих пяти лет равен 7,93. Бабушка тёщи округлила правильно.

Слова «модель» и «остаток» читатель мог встретить в «Прикольной статистике»: там прямая регрессии тоже была моделью, а отклонения точек от неё остатками. Разница в том, откуда берётся модель. В статистике её часто подбирают по данным, ничего не зная о механизме. В этой книге нас больше будут интересовать модели, построенные из понимания того, как устроен оригинал: что растёт, что убывает, что с чем борется.

Попробуйте в таблице. Откройте Excel или любую другую электронную таблицу. В ячейки A2:A6 впишите посаженное: 20, 25, 30, 30, 35. В B2:B6 выкопанное: 170, 190, 250,

210, 290. В ячейку F1 впишите параметр 8. В C2 формулу = $F$1*A2, это модель, и протяните её до C6. В D2 формулу =B2-C2, это остаток, и тоже до D6. В D7 впишите =СУММКВ(D2:D6), в английской версии =SUMSQ(D2:D6). Это сумма квадратов остатков (residual sum of squares), мера того, насколько модель не попадает в данные. При параметре 8 получится 1300. Теперь меняйте F1: при 7 выйдет 4750, при 9 выйдет 5950. Вы только что вручную подобрали параметр модели. Учёные делают то же самое, только перебирает за них компьютер.

Как модель подводит

Модель путают с оригиналом. В 1931 году философ Альфред Коржибски, уроженец Варшавы, живший в Америке, выступил на собрании Американской ассоциации содействия развитию науки в Новом Орлеане. Оттуда пошла поговорка: карта не территория (the map is not the territory). Модель говорит о том, что в неё вложили, а не о том, каков мир. Философ Альфред Норт Уайтхед в книге «Наука и современный мир» (1925) дал этой путанице имя: ошибка неуместной конкретности (fallacy of misplaced concreteness), то есть абстракция, принятая за живую вещь. Тёща делает именно такую ошибку, когда жалуется, что огород в этом году «недодал». Правило сам-восемь превратилось у неё из описания в обязанность картошки.

Выбросили важное. Даша не нарисовала берёзу, потому что та растёт за забором. Допущение «чужие деревья не важны» выглядит невинным, а теплица простояла бы в тени. Самые опасные допущения те, которые нигде не записаны, потому что их никто не заметил. Поэтому в серьёзной работе список допущений выписывают явно, чтобы потом было что проверять.

Не выбросили ничего. Это тёщин план и карта Кэрролла. Модель, равная оригиналу, бесполезна: изучать её так же трудно, как сам оригинал. В математических моделях та же

беда выглядит иначе. В модель набивают столько параметров, что она точно повторяет прошлые данные и ничего не говорит о будущих. В «Прикольной статистике» эта болезнь уже встречалась под именем переобучения (overfitting): многочлен, проходящий через все точки, на новых данных ошибался сильнее простой прямой. С моделями для прогноза мы разберёмся в тридцать четвёртой главе.

Вышли за пределы. Правило сам-восемь проверено на посадках от 20 до 35 килограммов. Это его область применимости (domain of validity). Если зять посадит на тех же шести сотках 600 килограммов, модель пообещает 4800, почти пять тонн. Столько с шести соток не выкопать ни при какой погоде: картошке станет тесно, а земли и солнца не прибавится. Перенос модели за пределы проверенного называется экстраполяцией (extrapolation). За этими пределами модель перестаёт описывать мир и начинает описывать мечты автора. Как строить модель роста, который упирается в потолок, мы узнаем в восьмой главе.

Чужой вопрос. Модель отвечает только на тот вопрос, под который построена. План для теплицы не годится для водопровода, а модель урожая ничего не скажет о вкусе картошки. Задайте модели чужой вопрос, и она всё равно выдаст ответ, спокойный и точный до килограмма. В этом и состоит её коварство: сомнений у формулы не бывает, их должен иметь человек.

Где это работает всерьёз

Карта для моряков. В 1569 году фламандский картограф Герард Меркатор выпустил карту мира, на которую до сих пор сердятся учителя географии. На ней Гренландия кажется почти с Африку, хотя Африка больше в 14 раз. Меркатор не ошибся, он выбрал. Его карта сохраняет углы, такие проекции называют равноугольными, или конформными (conformal projection). Курс, который корабль держит по компасу, на этой карте выглядит прямой линией. Такая линия постоянного курса называется локсодромой (rhumb line). Приложил линейку от порта до порта, измерил угол, и можно плыть. За это пришлось заплатить площадью: чем дальше от экватора, тем сильнее растянута карта.

Вот сколько именно.

Формула 2. Масштабный множитель проекции Меркатора

$$k = 1 / \cos \varphi \qquad k^2 = 1 / \cos^2 \varphi$$

растяжение длин — растяжение площадей

φ — географическая широта; у экватора k = 1, к полюсу k растёт без предела

Где	Широта	k	k²	Во сколько раз раздута площадь
Экватор	0°	1,00	1,0	
	30°	1,15	1,3	
Москва	55,75°	1,78	3,2	
	60°	2,00	4,0	
Гренландия	72°	3,24	10,5	
	80°	5,76	33,2	
Полюс	90°	∞	∞	на карту не помещается

Гренландия: 2,17 млн км² × 10,5 ≈ 23 млн км² на карте. Африка: 30,4 млн км², почти не растянута.
На самом деле Африка больше Гренландии в 14 раз, а на карте они кажутся почти равными.

У экватора масштаб честный. На широте Москвы площади раздуты втрое. На широте Гренландии, если взять её середину около 72 градусов, примерно в десять раз. А полюс на такой карте вообще не помещается: косинус девяноста градусов равен нулю, и растяжение уходит в бесконечность. Величина k называется масштабным множителем проекции (scale factor), и в ней нет ничего сложнее школьного косинуса. Моряку всё это не мешает: Гренландию он не покупает, он мимо неё плывёт. Для сравнения площадей стран у картографов есть другие, равновеликие проекции (equal-area projection), и на них искажаются уже углы. Карты, которая сохранила бы и то и другое, на плоском листе не быва-

ет. Это следствие замечательной теоремы Гаусса (Theorema Egregium, 1827): сферу нельзя расправить на плоскость, ничего не порвав и не растянув. Всякая карта мира обязана чем-то жертвовать, вопрос только в том, чем именно.

Схема метро. В 1931 году чертёжник Лондонского метро Гарри Бек, оставшийся тогда без работы, нарисовал схему линий. До него схемы метро были обычными картами: линии извивались, как и под землёй, станции в центре слипались, а окраины уходили за край листа. Бек рассудил, что пассажиру под землёй неважно, где станция стоит на самом деле. Ему нужно знать, в каком порядке идут станции и где пересадки. Бек выпрямил линии, оставил только горизонтали, вертикали и диагонали, растянул центр и сжал окраины. До этого он чертил электрические схемы, и это заметно. Начальство сомневалось, пробный тираж в 500 экземпляров вышел в 1932 году. В 1933 году схему напечатали тиражом 700 тысяч, и через месяц понадобилась допечатка. Математик сказал бы, что Бек сохранил топологию (topology), то есть порядок и связи, и пожертвовал расстояниями. По его принципу с тех пор рисуют почти все схемы метро мира. Расстояния на них врут, и это правильно.

Модельные организмы. Биологу нужно понять, как наследуются признаки, но поколение людей длится лет двадцать пять, а ставить на людях опыты нельзя. В 1910 году в Колумбийском университете Томас Хант Морган нашёл среди своих плодовых мушек дрозофил самца с белыми глазами

вместо красных. Мушки сменяют поколение за две недели и живут в бутылках из-под молока. Опыты с ними показали, что гены лежат в хромосомах, и в 1933 году Морган получил Нобелевскую премию. Дрозофила стала модельным организмом (model organism): живой моделью, на которой изучают то, что у неё общее с человеком. Ту же службу несут кишечная палочка, мышь и круглый червь с длинным латинским именем. Допущение здесь то же, что у Даши с планом: всё, чем муха отличается от человека, для данного вопроса не важно. Модель не обязана быть нарисованной или посчитанной, она может летать по лаборатории.

Все модели неверны. Британский статистик Джордж Бокс (1919–2013) написал в статье 1976 года «Наука и статистика» примерно так. Раз все модели неверны, учёный не получит «правильную», бесконечно её усложняя. Он должен следить за тем, что неверно по-крупному: глупо беспокоиться о мышах, когда вокруг бродят тигры. В 1979 году он вынес эту мысль в заголовок раздела статьи, и в таком виде она разошлась по миру: все модели неверны, но некоторые полезны (all models are wrong but some are useful). Тёщин план с тремя сортами смородины воевал с мышами. Берёза Кузьмича была тигром.

Вся эта книга про то, как делать неверные модели полезными. Модели будут разные, и о том, какими они бывают, следующая глава.

Задачи

Задача 1. Лист для плана. Участок имеет размер 20 на 30 метров, лист А4 21 на 29,7 сантиметра. Даша хочет удобный масштаб 1 : 100, сантиметр на метр. Поместится ли участок? Сколько займёт на плане крона берёзы диаметром 6 метров?

Ответ. Не поместится: 30 сантиметров на листе в 29,7 не хватает трёх миллиметров. Придётся взять 1 : 200, тогда участок займёт 10 на 15 сантиметров, а крона берёзы 3 сантиметра. Тёща сказала, что три миллиметра можно было и отрезать со стороны Кузьмича.

Задача 2. Остаток. В этом году посадили 40 килограммов и выкопали 300. Что обещала модель сам-восемь и чему равен остаток?

Ответ. Модель обещала $8 \cdot 40 = 320$, остаток $300 - 320 = -20$. Тёща записала в тетрадь «недодали двадцать», Даша в ноутбук «остаток минус двадцать». Число одно и то же, разница в том, что Даша ни с кого не спрашивает недостачу.

Задача 3. Пять тонн. Зять собирается посадить 600 килограммов и уже договаривается о продаже урожая. Сколько обещает модель и можно ли ей верить?

Ответ. Модель обещает 4800 килограммов, но она проверена на посадках от 20 до 35 килограммов и про 600 ничего не знает. Шесть соток не станут больше оттого, что в них закопали больше картошки. Это экстраполяция, и договор о

продаже лучше заключать после того, как картошку выкопают.

Задача 4. Гренландия. Площадь Африки примерно 30,4 миллиона квадратных километров, Гренландии примерно 2,17 миллиона. Во сколько раз Африка больше? Какую площадь Гренландия «показывает» на карте Меркатора, если растяжение на 72 градусах примерно 10,5?

Ответ. Африка больше в 14 раз. На карте Гренландия тянет на $2{,}17 \cdot 10{,}5$, то есть примерно 23 миллиона, а Африка у экватора почти не растянута. Тёща, увидев такую карту, прикинула, сколько там можно посадить картошки. Модель была хорошая, но для моряков.

Задача 5. Карта Кэрролла. Тёща решила сделать план в масштабе 1 : 1 из листов А4, чтобы уж точно ничего не забыть. Сколько листов уйдёт на шесть соток?

Ответ. Шесть соток равны 600 квадратным метрам, лист А4 занимает $0{,}21 \cdot 0{,}297$, то есть примерно 0,062 квадратного метра. Нужно около 9620 листов, это девятнадцать пачек по 500 и ещё сто двадцать листов. Картошка под бумагой не взойдёт, о чём фермеры у Кэрролла предупреждали ещё в 1893 году. В итоге тёща поступила как их страна: пользуется самим участком как его собственным планом и очень довольна точностью.


данные = модель + остаток

Глава 2. Какой бывает модель

В субботу утром тёща собрала семейный совет по вопросу государственной важности: наполнится ли сегодня бочка под водостоком. Бочка на 200 литров стоит у сарая, и от неё зависит неделя. Полная бочка значит, что огурцы поливают тёплой дождевой водой из лейки. Пустая значит, что зять всю неделю таскает вёдра из колодца и рассказывает всем о своих плечах.

Ответов прозвучало четыре, и ни один не похож на другой.

Даша открыла ноутбук и спросила, какая площадь у крыши сарая и сколько миллиметров осадков обещают. Через минуту у неё был ответ с точностью до литра.

Зять посмотрел в телефон и сообщил, что дождь будет с вероятностью 70%. Читатель «Прикольной статистики» помнит, что такие проценты означают: из десяти похожих дней дождливых будет семь. Видимо, сегодня один из тех семи, сказал зять, а может быть, и нет.

Тёща никуда не смотрела. Ласточки с утра летают низко, колено ноет, кот спит клубком, значит, бочка к вечеру будет полная. Почему кот и колено связаны с бочкой, тёща объяснять не стала: так было всегда.

А Петрович ничего не сказал. Он взял лейку, приставил к сараю лестницу и вылил два ведра воды на крышу. В бочку

не попало ни капли: водосток с осени забит листьями с берёзы Кузьмича, и вся вода уходит через край на грядку с укропом. Выходит, что при любом дожде бочка останется пустой, а укроп утонет.

Кто из четверых прав?

Здравый смысл устроил бы тут соревнование: дождёмся вечера и посмотрим, чей ответ совпал. Но такое соревнование нечестно, потому что участники отвечали на разные вопросы.

Даша ответила на вопрос «сколько воды соберётся, если выпадет столько-то». На вопрос «выпадет ли» она не отвечала вообще, дождь у неё задан заранее. Зять ответил как раз на «выпадет ли», зато ничего не сказал про литры. Тёща ответила сразу на всё, но не может объяснить, почему. Петрович не стал ничего считать, а устроил дождь сам, из лейки, и нашёл то, чего не было ни в одной формуле.

Все четверо сделали одно и то же: построили упрощённую замену бочки с дождём, то есть модель из первой главы. Только модели вышли разной породы. Одна сделана из цифр, другая из воды и жести. В одной есть случай, в другой нет. В одну можно заглянуть и увидеть, как она устроена, в другой виден только ответ. Понимать эти породы нужно не для экзамена. Когда вам приносят прогноз, первый разумный вопрос звучит так: а что это за модель? От ответа зависит, чему в ней можно верить, а чему нельзя.

Пять вопросов к модели

Классификаций моделей в учебниках почти столько же, сколько учебников. Удобнее всего думать о них не как о полках в шкафу, а как о пяти независимых вопросах. Каждую модель можно спросить обо всём пятикратно, и ответы друг от друга не зависят.

Из чего сделана? Материальная, или физическая, модель (physical model) состоит из вещества: макет корабля в бассейне, глобус, лейка Петровича над крышей. Если она повторяет оригинал в уменьшенном виде, её называют масштабной (scale model). Идеальная модель состоит из знаков: слов (словесная, или концептуальная, conceptual model), картинок (план Даши из первой главы) или формул (математическая). Есть и промежуточная порода, аналоговая модель (analog model): вещество в ней настоящее, но изображает совсем другое. Ниже мы увидим машину, где вода изображает деньги.

Есть ли в ней случай? Детерминированная модель (deterministic model) при одних и тех же входных данных всегда даёт один ответ, как Дашина формула. Стохастическая, или вероятностная, модель (stochastic model) содержит случайность и отвечает распределением исходов, как синоптик с его семьюдесятью процентами. Вся «Прикольная статистика», строго говоря, была книгой о стохастических моделях.

Есть ли в ней время? Статическая модель (static model) описывает состояние, динамическая (dynamic model) описывает изменение. Дашина формула говорит, сколько будет воды после дождя, и молчит о том, когда бочка наполнится. Из динамических моделей состоит почти вся эта книга.

Как идёт время? В дискретной модели (discrete model) время идёт шагами: час, сутки, год, строка в таблице Excel. В непрерывной (continuous model) оно течёт без скачков, и описывают его производными. Тёщина тетрадь с урожаями по годам дискретная, вода в водостоке течёт непрерывно. На практике непрерывное считают мелкими шагами, и в десятой главе мы увидим, как из шагов получается производная и почему слишком большой шаг ломает модель.

Видно ли, как она устроена? Белый ящик (white-box model), или механистическая модель, строится из понимания механизма: вода падает на крышу и стекает в бочку. Чёрный ящик (black-box model), или эмпирическая модель, связывает вход с выходом и не вдаётся в причины: кот клубком, значит, бочка полная. Слово пришло из кибернетики, особенно из книги Уильяма Эшби «Введение в кибернетику» (1956), где чёрному ящику посвящена целая глава. Между ними лежит самый распространённый на практике случай, серый ящик (grey-box model): форма формулы взята из понимания, а числа в ней подобраны по данным. Тёщино «сам-восемь» из прошлой главы именно такое: что урожай пропорционален посадке, понятно, а восьмёрку принес-

ла жизнь.

Теперь возьмём Дашину модель и пройдёмся по ней всеми пятью вопросами. Крыша сарая в плане 4 на 5 метров, то есть 20 квадратных метров. Каждый миллиметр дождя на квадратный метр это один литр воды. До бочки доходит не всё: часть остаётся на крыше, часть испаряется, часть сдувает ветром. Эту долю инженеры называют коэффициентом стока (runoff coefficient), для железной крыши примем его 0,9. Вот и вся модель.

Формула 1. Сколько воды соберёт бочка

$$V = S \cdot h \cdot k$$

V — литры в бочке; S — площадь крыши, м²; h — слой дождя, мм; k — коэффициент стока

крыша сарая 4 × 5 м = 20 м²; 1 мм на 1 м² = 1 литр; железная крыша k = 0,9; бочка 200 л

Дождь h, мм	20 · h · 0,9, л	В бочке, л	Уровень в бочке
5	90	90	
8	144	144	
11,1	200	200	
12	216	200 (+16 на укроп)	
15	270	200 (+70 на укроп)	

Обратный вопрос: бочка наполнится при h = 200 / (20 · 0,9) ≈ 11 мм. Прогноз 8 мм даёт 144 л.

Порода модели: математическая, детерминированная, статическая, почти белый ящик.

Сайт с прогнозом обещает 8 миллиметров. Даша получает $20 \cdot 8 \cdot 0{,}9 = 144$ литра: бочка наполнится чуть больше чем на

семь десятых. А если задать вопрос наоборот, формула скажет, сколько нужно дождя для полной бочки: 200, делённые на 18, это примерно 11 миллиметров. Всё, что сверх этого, пойдёт через край бочки на укроп.

По нашим пяти вопросам это математическая, детерминированная, статическая модель, почти белый ящик, а вопрос про течение времени к ней не относится. Почему «почти»? Потому что число 0,9 никто не выводил из законов физики, его измерили на многих крышах. В модели есть серое пятно.

Из той же формулы легко сделать другие породы. Динамическую: если дождь идёт по 4 миллиметра в час, в бочку каждый час прибавляется 72 литра, и она наполнится через 2 часа 47 минут. Стохастическую: вместо одного числа дождя подставить распределение и спрашивать уже о вероятности полной бочки. Модель одна и та же, вопросы разные.

Попробуйте в таблице. Сделайте статическую модель динамической. В ячейку F1 впишите площадь крыши 20, в F2 коэффициент 0,9, в F3 объём бочки 200. В столбец A впишите часы от 0 до 6, в столбец B дождь за каждый час в миллиметрах, например 0, 2, 5, 4, 1, 0, 3. В C2 напишите 0, это пустая бочка в начале. В C3 формулу =МИН($F$3; C2 + $F$1*$F$2*B3), в английской версии =MIN($F$3, C2 + $F $1*$F$2*B3), и протяните вниз. Функция МИН изображает край бочки: больше 200 литров в неё не влезет. Посмотрите, в каком часу бочка переполнится, а потом поменяйте осадки

и коэффициент. Вы только что построили дискретную динамическую модель с ограничением.

Как выбор породы подводит

Средний дождь вместо настоящего. Детерминированная модель соблазнительна: одно число на входе, одно на выходе. Но если на входе стоит среднее случайной величины, на выходе среднего часто не получается. Пусть в половине случаев выпадает 4 миллиметра, а в половине 20, в среднем 12. По среднему дождю бочка наполняется доверху, 200 литров. В жизни же половина дней даст 72 литра, а половина 200 и потоп укропа, в среднем 136 литров. Край бочки срезает большие дожди и не трогает маленькие. Пока в модели есть такой излом, математики называют его нелинейностью (nonlinearity), среднее на входе не даёт среднего на выходе. В науке на эту тему есть неравенство Иенсена (Jensen's inequality), а мораль проста: если во входных данных сидит случай, честнее строить стохастическую модель.

Чёрный ящик в новых условиях. Тёщины приметы не глупы, за ними стоят десятилетия наблюдений. Ласточки действительно спускаются ниже за насекомыми, когда воздух сыреет. Беда чёрного ящика в другом: он работает, пока мир остаётся таким же, как в данных, и не сообщает, когда мир изменился. Колено тёщи стареет, кот новый, а водосток забит. У белого ящика видно, какая деталь сломалась, у чёрного виден только неверный ответ.

Белый ящик с дыркой. Зато белый ящик верит себе до

конца. В Дашиной формуле есть крыша, дождь и коэффициент, и нет водостока, потому что водосток предполагался исправным. Формула посчитала 144 литра с такой же уверенностью, с какой посчитала бы их для исправного водостока. Найти дырку помогла физическая модель, лейка. В ней нечего забыть: настоящая вода сама проверила все допущения, в том числе те, которые никто не записал. В этом сила физических моделей, и поэтому самолёты до сих пор продувают в аэродинамических трубах, хотя расчёты давно делают на компьютерах.

Масштаб не всё терпит. У физической модели своя слабость: не все свойства мира уменьшаются одинаково. Уменьшите реку в тысячу раз, и вода в ней потечёт не как в реке, а как в луже после дождя: липко, с каплями. Почему так, объяснит следующая глава, а инженеры давно научились это обходить. Как именно, видно на самой большой масштабной модели в истории ниже.

Имя вместо проверки. Наконец, сама классификация ничего не доказывает. «Стохастическая динамическая модель» звучит солиднее, чем «кот клубком», но это только описание породы, а не свидетельство качества. Хороша ли модель, решает не её тип, а проверка на данных, которых она ещё не видела. Этому посвящена тридцать четвёртая глава. Иногда кот выигрывает.

Где это работает всерьёз

Река на двухстах акрах. После великого наводнения 1927 года правительство США поручило инженерным войскам укротить Миссисипи. Чтобы понять, что сделает с рекой каждая дамба, инженеры построили физическую модель всего бассейна под городом Клинтон в штате Миссисипи. Строили её с 1943 по 1966 год. В военные годы из-за нехватки рабочих рук землю там копали немецкие и итальянские военнопленные. Модель занимала около 200 акров, это примерно 80 гектаров, и изображала бассейн, занимающий 41% территории США. Реки из бетона, города из карточек, насосы вместо дождей.

Масштаб у неё был с хитростью: 1 : 2000 по горизонтали и 1 : 100 по вертикали. Значит, глубины и высоты там растянуты в 20 раз по сравнению с расстояниями. Такую модель называют искажённой (distorted model). Без искажения река глубиной 10 метров превратилась бы в ручеёк глубиной 5 миллиметров, и течение в нём ничем не напоминало бы речное.

А если модель уменьшена, то и время в ней идёт по-другому. Насколько именно, отвечает теория подобия (similitude). Для течений со свободной поверхностью, где главная сила тяжесть, правило такое: число Фруда (Froude number) в модели должно быть таким же, как в реке. Названо оно в честь

английского инженера Уильяма Фруда, который в XIX веке испытывал модели кораблей в опытовом бассейне. Из этого правила вытекают масштабы скорости, времени и расхода воды.

Формула 2. Подобие Фруда: время в уменьшенной реке

$$Mv = \sqrt{Mв}$$

масштаб скорости

$$Mt = Mг / Mv$$

масштаб времени

Мг — горизонтальный масштаб, Мв — вертикальный; число Фруда в модели то же, что в реке

Величина	Как считается	Модель Миссисипи
Длины	задано	1 : 2000
Высоты и глубины	задано	1 : 100
Скорость воды	$\sqrt{100} = 10$	**в 10 раз медленнее**
Время	2000 / 10 = 200	**в 200 раз быстрее**
Расход воды	$2000 \cdot 100 \cdot \sqrt{100}$	**в 2 000 000 раз меньше**

Сутки реки = 1440 мин / 200 = 7,2 минуты модели. Месяц паводка = 3,6 часа.
В источниках о настоящей модели называют около 5 минут на сутки.

Масштаб скорости равен корню из вертикального масштаба: корень из 100, то есть вода в модели течёт в 10 раз медленнее. Расстояния короче в 2000 раз, скорость ниже в 10 раз, значит, время идёт быстрее в 200 раз. Сутки речной жизни проходят за 7,2 минуты, весенний паводок длиною в месяц за три с половиной часа. Расход воды уменьшается в 2 миллиона раз. Источники называют для самой модели числа поменьше: сутки за пять минут, галлон модели на полто-

ра миллиона галлонов реки. Это обычное дело: теория даёт порядок величины, а искажённую модель потом подгоняют под настоящие наблюдения реки, в том числе шероховатостью дна.

В апреле 1952 года на реке Миссури началось большое наводнение, и мэры Омахи и Каунсил-Блаффса попросили прогнать паводок через модель. Шестнадцать суток модель работала круглосуточно. По её прогнозам решали, где достаточно добавить мешки с песком на дамбы, а откуда нужно выводить людей. Ущерб, которого удалось избежать, оценивают в 65 миллионов долларов. В семидесятые годы те же расчёты стали делать на компьютере. Бетон трескался, его нужно было вечно чинить, и математическая модель вытеснила физическую. Сегодня самая большая масштабная модель в истории зарастает лесом в городском парке Джексона, и в 2018 году ей присвоили звание памятника инженерного искусства.

Экономика из трубок. В 1949 году студент Лондонской школы экономики, новозеландец Билл Филлипс, до этого учившийся на инженера-электрика, собрал в гараже своей квартирной хозяйки странную машину. Ростом около двух метров, из прозрачных баков и трубок, по которым течёт подкрашенная вода. Вода изображала деньги. Из верхнего бака, казны, она растекалась по статьям расходов, налоги насос закачивал обратно в казну, сбережения утекали в отдельный бак, а инвестиции подливали воду снова. Машину на-

звали MONIAC, или машиной Филлипса. Это аналоговая модель в чистом виде: вода в ней настоящая, законы течения тоже, а изображает она не реку, а хозяйство страны. Клапаны и поплавки решали уравнения, которые тогда было трудно посчитать на бумаге. Филлипс и его помощник Уолтер Ньюлин сами удивились, что машину удаётся настроить с точностью до 2%. Их сделали примерно дюжину для университетов и банков, несколько работают до сих пор: в Кембридже на ней показывают студентам, куда утекают деньги, а ещё одна стоит в Музее науки в Лондоне.

Писатель Терри Пратчетт в романе «Делай деньги» придумал похожую машину, которая достигла такой точности, что стала управлять настоящей экономикой: откроешь краник в стеклянной трубке, и в городе меняются цены. Это та же шутка, что и карта Кэрролла, только с обратной стороны: модель настолько хороша, что уже не модель. В жизни модели и правда иногда меняют то, что описывают, но через людей, которые им поверили. О самосбывающихся прогнозах будет последняя глава книги.

И ещё одно. И на Миссисипи, и в экономике физические модели уступили место математическим, посчитанным на компьютере. Но математика в них та же: те же баки, те же притоки и оттоки, только теперь в виде чисел. Бочка с притоком и оттоком станет самой частой картинкой этой книги, и в пятой главе мы начнём с неё.

Задачи

Задача 1. Перепись моделей. Назовите породу каждой модели: школьный глобус; прогноз «дождь с вероятностью 70%»; примета «ласточки низко, будет дождь»; Дашина таблица, где бочка наполняется по часам.

Ответ. Глобус: физическая масштабная статическая модель, если его не крутить. Прогноз: математическая, стохастическая, динамическая. Примета: словесная модель, чёрный ящик. Таблица Даши: математическая, детерминированная, динамическая, дискретная. Тёща требует добавить пятую категорию, «проверенная», и отнести туда только примету.

Задача 2. Мелкий дождь. Крыша 20 квадратных метров, коэффициент стока 0,9, выпало 6 миллиметров. Сколько воды в бочке, если водосток уже прочищен?

Ответ. $20 \cdot 6 \cdot 0{,}9 = 108$ литров, чуть больше половины бочки. Огурцы польют, помидоры подождут. Укроп впервые за сезон остался сухим и даже слегка обижен.

Задача 3. Новая бочка. Зять купил бочку на 300 литров, чтобы больше не таскать вёдра. Сколько должно выпасть дождя, чтобы она наполнилась?

Ответ. $300 / (20 \cdot 0{,}9)$ примерно 16,7 миллиметра. Полной бочка будет только после хорошего ливня. Вёдра зять будет таскать по-прежнему, зато теперь в большую бочку.

Задача 4. Река на полигоне. Река шириной 1 километр и глубиной 10 метров попала в модель Миссисипи (1 : 2000 по горизонтали, 1 : 100 по вертикали). Какие у неё ширина и глубина? Какая была бы глубина без искажения?

Ответ. Ширина 0,5 метра, глубина 10 сантиметров. Без искажения глубина была бы 10 / 2000 метра, то есть 5 миллиметров. В такой «реке» не утонет даже муравей, а вода будет течь как разлитый на столе чай.

Задача 5. Макет пруда. Председатель дачного товарищества решил изучить, как весна наполняет пруд, и построил в корыте макет в масштабе 1 : 100 по всем направлениям. Сколько длится в макете одна сутка по подобию Фруда?

Ответ. Масштаб скорости корень из 100, то есть 10. Масштаб времени 100 / 10 = 10. Сутки проходят за 2,4 часа, а весь апрель за трое суток. Председатель трое суток не отходил от корыта и теперь первым в товариществе знает, что будет в апреле. Корыто тёща обещала ему не простить.


V=S·h·k

Глава 3. Почему не бывает великанов

В феврале Петрович и Кузьмич пошли на пруд ловить из-подо льда и взяли с собой Кузьмичёва внука Сёмку. Сёмке пять лет, в нём 20 килограммов живого веса и два килограмма шубы. В Петровиче сто килограммов, и на нём такой же тулуп, как на Сёмке шуба, только больше. Через час Сёмка посинел и запросился домой. Петрович просидел до сумерек и вернулся с четырьмя карасями и в прекрасном настроении.

Дома разгорелся спор о том, кто виноват. Тёща считала, что ребёнка одели хуже, чем деда, и проверяла шубу на просвет. Кузьмич считал, что внук избалован городом и в его годы он сам ловил рыбу босиком. А Петрович скромно заметил, что у него просто закалка.

И только Даша спросила: а что, если никто не виноват, а виноват размер?

Здравый смысл здесь у тёщи под рукой, только на кухне, а не на рыбалке. Она отлично знает, что кружка чая остывает за десять минут, а большая кастрюля борща стоит горячей полдня. А нарезанная картошка варится быстрее целой, и мелкие дрова разгораются быстрее полена. Во всех этих случаях работает одно правило: чем меньше предмет, тем больше у него поверхности на каждый килограмм внутрен-

ностей.

Человек в этом смысле та же кастрюля, только с печкой внутри. Тепло вырабатывается всем телом, то есть каждым его килограммом, а уходит через кожу. У Сёмки на каждый килограмм приходится больше кожи, чем у Петровича, и он остывает как кружка, а Петрович как кастрюля. Шуба тут ни при чём, и закалка тоже.

Но здравый смысл говорит только «больше» и «меньше». Во сколько раз? На этот вопрос отвечает один из самых старых и самых дешёвых инструментов моделирования, и для него не нужно знать ничего, кроме единиц измерения.

Квадрат против куба

Возьмём кубик со стороной 1 сантиметр и увеличим все его размеры вдвое. Площадь каждой грани вырастет вчетверо, потому что $2 \cdot 2 = 4$. Объём вырастет ввосемеро, потому что $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Сто процентов всего, что вы проходили в шестом классе, и всё же из этой арифметики вырастает целая наука. При увеличении размера в k раз площади растут как k^2, а объёмы и массы как k^3. Это закон квадрата и куба (square–cube law). Всё, что проходит через поверхность (тепло, кислород, сопротивление воздуха), отстаёт от всего, что сидит в объёме (вес, запас тепла, потребность в еде).

Теперь сделаем то, над чем мы посмеивались в первой главе: рассмотрим сферического Сёмку и сферического Петровича. Даша приняла два допущения: человек имеет плотность воды, то есть килограмм на литр, и форму шара. Шар в 20 килограммов имеет радиус 17 сантиметров и поверхность 0,36 квадратного метра. Шар в 100 килограммов имеет радиус 29 сантиметров и поверхность 1,04 квадратного метра. Поверхности на килограмм у Сёмки в 1,71 раза больше.

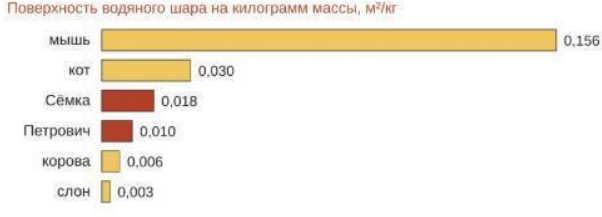
И вот что замечательно: радиусы и плотность в ответе сократились. Осталась одна простая зависимость.

Формула 1. Закон квадрата и куба

$$S / m \sim m^{-1/3}$$

площадь растёт как k^2, масса как k^3: кто легче в 5 раз, у того кожи на кг больше в 1,71 раза

	Масса, кг	Шар из воды, м²/кг	Мостеллер, м²/кг
Сёмка	20	0,0178	0,0391
Петрович	100	0,0104	0,0220
Во сколько раз		**1,71**	**1,77**



Поверхность на килограмм падает как масса в степени минус одна треть. Петрович тяжелее в 5 раз, кубический корень из 5 равен 1,71, и во столько же раз медленнее он остывает при прочих равных. Зависимости вида «величина пропорциональна размеру в какой-то степени» называют степенными законами масштабирования (scaling laws), а в биологии науку о том, как свойства организма меняются с его размером, называют аллометрией (allometry).

Тёща сказала, что Сёмка не шар, а Петрович шар только отчасти. Справедливо. Проверим сферическую корову на-

стоящей медицинской формулой. Врачи оценивают площадь поверхности тела по росту и весу, например по формуле Мостеллера: корень из роста в сантиметрах, умноженного на вес в килограммах и поделённого на 3600. Пусть Сёмка ростом 110 сантиметров, а Петрович 175. Получается 0,78 и 2,20 квадратного метра. Настоящие люди вдвое «кожистее» шаров, а вот отношение на килограмм выходит 1,77 против шаровых 1,71. Сферическая корова ошиблась в абсолютных числах, но почти точно угадала отношение, а именно об отношении и был вопрос. В этом и есть секрет хорошего упрощения: ошибки, одинаковые для всех, при сравнении сокращаются.

А теперь обобщим приём. У каждой физической величины есть размерность (dimension): длина, масса, время или их сочетание. Скорость это длина, делённая на время, плотность это масса, делённая на куб длины. Складывать и сравнивать можно только величины одной размерности, и любая честная формула должна сходиться по единицам слева и справа. Нельзя сложить килограмм картошки с метром грядки, как бы тёща иногда ни пыталась. На этом требовании стоит анализ размерностей (dimensional analysis): если знать, от каких величин зависит ответ, то часто из них можно сложить только одно выражение нужных единиц, и формула получается без всякой физики, с точностью до числового множителя. Строгую форму этому приёму дала пи-теорема Бакингема (Buckingham pi theorem), опубликованная американским

физиком Эдгаром Бакингемом в 1914 году. Число Фруда из прошлой главы как раз такое безразмерное сочетание.

Вот и обещанный ответ про реку глубиной пять миллиметров из прошлой главы. У воды есть поверхностное натяжение, сила, которая собирает капли и держит на воде водомерку. Оно измеряется в ньютонах на метр. Из него, плотности воды и ускорения свободного падения можно сложить ровно одну длину: корень из натяжения, делённого на плотность и на g. Для воды это примерно 2,7 миллиметра, и называется она капиллярной длиной (capillary length). На масштабах куда больше её правит тяжесть, и вода ведёт себя как река. На сравнимых масштабах вмешивается натяжение, и вода ведёт себя как капля на клёнке. Река в пять миллиметров попадает как раз туда, поэтому инженеры Миссисипи и растянули глубины в 20 раз.

Попробуйте в таблице. В столбец A с ячейки A2 впишите массы в килограммах: 0,03 (мышь), 4 (кот), 20 (Сёмка), 100 (Петрович), 500 (корова), 5000 (слон). В B2 формулу поверхности водяного шара такой массы =4*ПИ()*(3*A2/1000/(4*ПИ()))^(2/3), в английской версии =4*PI()*(3*A2/1000/(4*PI()))^(2/3). В C2 поверхность на килограмм =B2/A2. Протяните вниз и постройте точечную диаграмму C от A, а затем в свойствах осей включите логарифмическую шкалу по обеим осям. Точки лягут на прямую, и её наклон равен минус одной трети: так степенные законы выглядят на логарифмических осях, как и закон Ципфа

в «Прикольной статистике». Мышь окажется примерно в 55 раз «кожистее» слона, и станет понятно, почему она ест целый день.

Как метод ломается

Живое не слушается куба. Из нашего рассуждения следует, что обмен веществ животного, которому надо возмещать потери через кожу, должен расти как масса в степени две трети. Так и думали в XIX веке, это называлось законом поверхности, и немецкий физиолог Макс Рубнер в 1883 году подтвердил его опытами на собаках. Но в 1932 году Макс Клайбер собрал данные по животным очень разного размера и получил степень три четверти, а не две трети. Закон Клайбера (Kleiber's law) до сих пор служит одной из загадок биологии: объяснений несколько, и спор не закончен. Разница между степенями кажется ничтожной, но на пути от мыши до слона она даёт ошибку почти втрое. Формула из размерностей дала хорошую догадку, а поправили её данные.

Форма не сохраняется. Всё сказанное верно для точных увеличенных копий, то есть при геометрическом подобии (geometric similarity). Природа же копий не делает. Слон не увеличенная газель: у него ноги как тумбы, и именно в ответ на закон квадрата и куба. Ребёнок тоже не уменьшенный взрослый: голова у него сравнительно большая. Потому точные формулы площади тела и содержат не одну массу, а ещё и рост.

Забыли переменную. Анализ размерностей честно перебирает только те величины, которые вы ему дали. Если вы

забыли ветер на льду, он так и не появится в формуле, а формула будет совершенно стройной и неверной. Это тот же забитый водосток из прошлой главы: метод не сообщает, что вы чего-то не учли.

Множитель неизвестен. Размерности ничего не говорят о безразмерном числе впереди формулы. Обычно оно не слишком далеко от единицы, и на этом держится вся вера физиков в такие оценки. Но «обычно» не значит «всегда», и чтобы узнать множитель, нужен либо опыт, либо настоящее решение уравнений.

Два подобия сразу не даются. В прошлой главе модель реки сохраняла число Фруда. Но у течения есть и другие безразмерные числа, например число Рейнольдса (Reynolds number), которое отвечает за вязкость. Сохранить оба сразу в уменьшенной модели на обычной воде нельзя: пришлось бы взять жидкость во много раз менее вязкую. Поэтому корабельные инженеры с времён Фруда делят сопротивление модели на части и пересчитывают каждую своим способом. Уменьшенная модель всегда немного врёт, и вопрос только в том, знаете ли вы, в чём именно.

Где это работает всерьёз

Великаны Галилея. В 1638 году Галилео Галилей, уже старый и под домашним арестом, выпустил книгу «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки». Там впервые сформулирован закон квадрата и куба: отношение объёмов больше отношения поверхностей. И там же Галилей делает вывод, скучный для любителей сказок. Ни природа, ни инженер не могут увеличивать корабли, дворцы и животных бесконечно, сохраняя пропорции: вес растёт как куб, а прочность кости зависит от площади её сечения, то есть как квадрат. Великану пришлось бы либо иметь кости несоразмерной толщины, либо ломать их под собственным весом.

Почти через три столетия, в 1920-х годах, английский биолог Джон Холдейн довёл эту мысль до цифр в знаменитом эссе «О том, как иметь подходящий размер» (On Being the Right Size). Возьмём великана в десять раз выше, шире и толще человека. Весит он в тысячу раз больше, а сечение кости у него только в сто раз больше. Каждый квадратный сантиметр его бедренной кости держит в десять раз больше человеческого, а человеческая бедренная кость, по Холдейну, ломается примерно от десятикратного веса тела. Великан ломал бы бедро на каждом шагу. Там же Холдейн предлагает мысленный опыт с глубокой шахтой: мышь после падения в

неё отделается лёгким испугом, а крупному животному не повезёт. Сопротивление воздуха идёт по поверхности, вес по объёму, и маленький падает почти как пушинка.

Энергия из фотографий. Самая знаменитая история про анализ размерностей связана с войной, и рассказать её нужно без шуток. 16 июля 1945 года в пустыне Нью-Мексико США испытали первую атомную бомбу. Мощность взрыва держали в секрете. Позже были рассекречены снимки скоростной съёмки огненного шара, сделанные Джулианом Мэком: на каждом кадре стояли масштабная линейка и время после взрыва. Британский физик Джффри Инграм Тейлор ещё в 1941 году по заданию своего правительства построил теорию ударной волны очень сильного взрыва. Одновременно с ним к тем же выводам пришли Джон фон Нейман в США и Леонид Седов в СССР, поэтому решение называют волной Тейлора–фон Неймана–Седова (Taylor–von Neumann–Sedov blast wave). Когда ему попались снимки Мэка, Тейлор оценил по ним мощность взрыва и в 1950 году опубликовал результат: около 16,8 тысячи тонн тротила. Официально тогда называли цифры от 15 до 20 тысяч.

Полный расчёт Тейлора сложен, но его сердцевину можно получить одними размерностями. От чего может зависеть радиус шара в первые мгновения? От выделившейся энергии E (масса умножить на квадрат длины и делить на квадрат времени), от плотности воздуха (масса на куб длины) и от времени. Из этих трёх величин длина складывается од-

ним-единственным способом, и отсюда формула для энергии.

Формула 2. Энергия взрыва по размерностям (Тейлор)

$$E \approx \rho \cdot R^5 / t^2$$

E — энергия, Дж; ρ — плотность воздуха, кг/м³; R — радиус огненного шара, м; t — время, с

Проверка единиц: кг/м³ · м⁵ / с² = кг · м² / с² = джоуль

Величина	Значение
Время после вспышки, t	0,025 с
Радиус шара, R	140 м
Плотность воздуха, ρ	1,25 кг/м³
E = 1,25 · 140⁵ / 0,025²	**≈ 1,1 · 10¹⁴ Дж**
В тротиловом эквиваленте	**≈ 26 тысяч тонн**

Тейлор с точным множителем и по серии кадров (1950): около 16,8 тысячи тонн.
Официальные цифры тех лет: 15–20 тысяч тонн. Порядок угадан по одному кадру.

Подставим числа, которые часто берут в учебниках с одного из кадров: через 25 тысячных секунды радиус шара около 140 метров, плотность воздуха 1,25 килограмма на кубометр. Получается примерно 10^14 джоулей, или около 26 тысяч тонн тротила. Без всякой физики взрыва, по одному кадру и единицам измерения, мы попали в нужный порядок. Тейлор уточнил числовой множитель из своей теории и проверил зависимость по целой серии кадров: радиус действительно рос как время в степени две пятых.

Историю Тейлора часто рассказывают как триумф чистого анализа размерностей, и это не совсем так: за ней стояли годы работы над уравнениями газовой динамики. Но именно размерности подсказали, в каком виде искать ответ. Тот же приём сегодня применяют для оценки силы промышленных взрывов по видеозаписям, а астрофизики с его помощью описывают остатки взорвавшихся звёзд.

И мирное приложение, для равновесия. Врачи дозируют некоторые лекарства, например для химиотерапии, не на килограмм веса, а на квадратный метр поверхности тела, та самая формула Мостеллера. Из-за закона квадрата и куба ребёнок не уменьшенный взрослый и для аптеки, и для рыбалки. Так что Сёмке в следующий раз нужна не просто шуба, а шуба потеплее, и не на три часа, а на час с небольшим.

Задачи

Задача 1. Мелкая картошка. Тёща чистит картошку, срезая кожуру толщиной 1 миллиметр. Какая доля картофелины уходит в очистки, если считать её шаром радиусом 2 сантиметра? А радиусом 4?

Ответ. Остаётся шар радиусом 1,9 и 3,9 сантиметра. В очистки уходит 1 - (1,9 / 2)^3, примерно 14%, и 1 - (3,9 / 4)^3, примерно 7%. Мелкая картошка теряет вдвое больше. Тёща всю жизнь варит мелкую в мундире и теперь требует признать это законом тёщи.

Задача 2. Великан из сказки. Сёмке прочитали про великана в десять раз выше Петровича и такого же сложения. Сколько он весит и во сколько раз сильнее нагружены его кости?

Ответ. Вес в 1000 раз больше, сто тонн. Сечение костей в 100 раз больше, значит, нагрузка на каждый сантиметр в 10 раз выше. До тридевятого царства великан не дойдёт, сломает ногу у порога. Сёмка очень расстроился, и Даше велели больше сказок не читать.

Задача 3. Большой пруд. Председатель товарищества решил выкопать новый пруд вдвое длиннее, шире и глубже старого и запустить туда восемь раз больше карасей: воды-то ввосемеро больше. Зимой кислород попадает в пруд через проруби и поверхность. Сколько его достанется каждому ка-

расю?

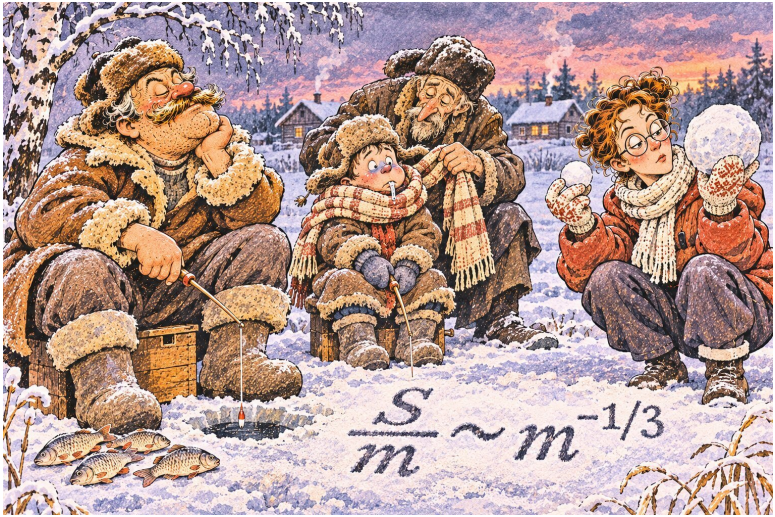
Ответ. Поверхность выросла вчетверо, карасей ввосемеро, каждому достанется вдвое меньше. Председатель предлагает проруби делать побольше и назначил ответственным Петровича, как самого закалённого. Сколько нужно карасям на самом деле, мы выясним в восьмой главе.

Задача 4. Кружка и кастрюля. Кружка чая остывает до комнатной температуры за десять минут. Кастрюля с борщом такой же формы, но в пять раз больше по всем размерам. Сколько будет остывать борщ, если время остывания пропорционально отношению объёма к поверхности?

Ответ. Отношение объёма к поверхности растёт как размер, то есть в 5 раз, и борщ остывает примерно 50 минут. Тёща утверждает, что у неё борщ держит тепло два часа. И она права: в модели забыли крышку и полотенце, которым кастрюлю укутывают.

Задача 5. Кот просит добавки. Петрович весит 100 килограммов и съедает в день, условно, 2,5 килограмма еды. Сколько нужно коту весом 4 килограмма по закону Клайбера, если потребность в еде растёт как масса в степени три четверти?

Ответ. 2,5 · (4 / 100)^0,75, примерно 220 граммов. Это в два с лишним раза больше на килограмм, чем у Петровича. Кот с расчётом согласен во всём, кроме степени: на кухне он строго придерживается степени ноль, то есть требует столько же, сколько Петрович.


$\frac{S}{m} \sim m^{-1/3}$

Глава 4. Сколько картошки съест товарищество

На общем собрании дачного товарищества председатель объявил народную стройку. У старой водонапорной башни будет общий погреб, чтобы каждый не возил картошку в город и не держал её на балконе под старым одеялом. Деньги соберут с участков, бригаду найдут. Остался один вопрос: какого размера рыть погреб? Для этого надо знать, сколько картошки товарищество съедает за год.

Зал зашумел. Кто-то кричал сто тонн, кто-то тонну, Кузьмич предложил спросить в администрации. Председатель посмотрел на тёщу, как на единственный в товариществе статистический орган. Тёща поправила платок и сказала, что тут нечего гадать: надо обойти все восемьдесят участков и каждого спросить. К воскресенью будет точная цифра.

Из заднего ряда Даша сказала, что цифра будет через пять минут, и даже без ноутбука. Зал повернулся. Тёща приняла вызов.

Способ тёщи надёжный и дорогой. Это сплошной учёт, как перепись населения, и читатель «Прикольной статистики» знает, что и у него есть слабости: люди помнят неточно, а кое-кто на вопросы тёщи принципиально не отвечает. Но даже если всё пройдёт идеально, тёща потратит неделю и

восемьдесят чаепитий, чтобы ответить на вопрос, для которого точность не нужна. Погреб всё равно строят с запасом, и разница между 12 и 15 тоннами его размера не изменит. Важно другое: тонна это, десять или сто. Это три разных погреба: яма под сараем, нормальное хранилище и овощебаза с воротами для грузовика.

Здравый смысл здесь подсказывает простое: если нужен только порядок, не надо измерять, надо сообразить. А соображать про целое товарищество трудно, про одного человека легко. Сколько картошек вы съели вчера? Сколько весит одна? На такие вопросы каждый ответит не задумываясь. Значит, большой вопрос надо разобрать на маленькие, каждый из которых оценивается по собственному опыту, и перемножить ответы.

Пять минут против недели

Даша написала на доске объявлений пять чисел. Участков в товариществе 80, это известно точно. На участке в среднем три едока: где-то одинокий пенсионер, где-то семья из пяти. Каждый съедает в день примерно две картофелины, если считать и суп, и пюре, и дни с макаронами. Картофелина весит граммов сто. В году 365 дней. Перемножила: $80 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0{,}1 \cdot 365 = 17\,520$ килограммов, то есть около 17 тонн. Примерно двадцать, сказала Даша, не две и не двести.

В воскресенье тёща принесла тетрадь с подворным обходом: около 12 тонн, числа условные. Даша ошиблась в полтора раза. Тёща потребовала признать поражение математики. Председатель же заметил, что погреб под двадцать тонн он начал проектировать ещё в среду, а тёщины 12 тонн в него прекрасно влезают.

То, что сделала Даша, называется оценкой Ферми (Fermi estimate), а сама задача задачей Ферми (Fermi problem). Суть метода: неизвестную величину записывают как произведение нескольких сомножителей, каждый из которых можно оценить по здравому смыслу. Цель не точное число, а порядок величины (order of magnitude), то есть ответ с точностью до множителя десять: единицы, десятки, сотни. Оценка, верная в пределах двух-трёх раз, у физиков считается хорошей.

Формула 1. Оценка Ферми: произведение догадок

$$N = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$$

каждый сомножитель оценивается по здравому смыслу; цель — порядок величины

80 участков	×	3 едока	×	2 картофелины в день	×	0,1 кг одна картофелина	×	365 дней

$$= 17\,520 \text{ кг} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ кг}$$

Оценка Даши (5 минут)	17,5 т
Обход тёщи (неделя, числа условные)	12 т
Отношение	**1,46 раза**

Тут есть что-то странное. Даша не знала точно ни одного сомножителя, кроме числа участков и дней в году. Людей могло оказаться два, картофелин полторы, вес сто пятьдесят граммов. Почему же в итоге она не ошиблась в десять раз? Потому что ошибки сомножителей независимы и делаются в разные стороны. Где-то перебрали, где-то недобрали, и при умножении перебор одного частично съедает недобор другого. Это тот же эффект, что у толпы Гальтона, угадавшей вес вола, из первой главы «Прикольной статистики», только не для суммы, а для произведения.

Чтобы увидеть это в цифрах, удобно перейти к логарифмам. Логарифм произведения равен сумме логарифмов, и ошибка «в два раза» становится ошибкой на плюс или минус

логарифм двух. А независимые случайные ошибки в сумме складываются не как числа, а как квадраты, то есть общий разброс растёт как корень из числа слагаемых. Читатель «Прикольной статистики» узнает здесь старого знакомого, корень из n из девятой главы. В науке это называют распространением неопределённости (propagation of uncertainty).

Формула 2. Как растёт ошибка произведения

$$\sigma = \sqrt{n} \cdot \sigma_1$$

σ — разброс логарифма итога, σ_1 — одного сомножителя, n — число сомножителей (propagation of uncertainty: независимые ошибки складываются в квадратах)

Сомножителей	Худший случай	Типичная ошибка	Итог в пределах ×2
1	× 2	× 1,5	100%
2	× 4	× 1,8	75%
3	× 8	× 2,0	67%
5	× 32	× 2,4	55%
10	× 1024	× 3,5	41%

Каждый сомножитель ошибается случайно, но не больше чем вдвое (расчёт Монте-Карло). Худший случай растёт как 2^n, типичная ошибка — гораздо медленнее, как корень из n.

Пусть каждый из пяти сомножителей может ошибиться как угодно, но не больше чем вдвое. В худшем случае, когда все ошибки падают в одну сторону, ответ ошибётся в 2^5 = 32 раза. Но такой случай редкий, как пять орлов подряд с лишним. Типичная же ошибка получается совсем скромной.

Даша проверила это на компьютере: сто тысяч раз испортила каждый из пяти сомножителей случайной ошибкой от «вдвое меньше» до «вдвое больше» и посмотрела на произведение. В 55% случаев итог остался в пределах двух раз от истины, в 77% в пределах трёх. Такой приём, случайные прогоны вместо формул, называется методом Монте-Карло, и ему будет посвящена девятнадцатая глава.

И ещё один приём Ферми для сомножителей, о которых вообще нет представления. Вас спрашивают, сколько червей живёт на квадратном метре грядки. Точно больше двух, точно меньше двухсот. Берите не середину, сто, а среднее геометрическое (geometric mean): корень из $2 \cdot 200$, то есть 20. От 20 до 2 в десять раз, и до 200 тоже в десять: вы одинаково далеко от обоих краёв в том смысле, который важен для умножения.

Попробуйте в таблице. Повторите Дашин опыт. В ячейку A2 запишите =2^(2*СЛЧИС()-1), в английской версии =2^(2*RAND()-1). Это случайный множитель ошибки от 0,5 до 2. Скопируйте её в B2, C2, D2 и E2: пять сомножителей. В F2 запишите =A2*B2*C2*D2*E2, это общая ошибка оценки. Протяните строку до 1001-й. В H1 посчитайте долю удачных оценок =СЧЁТЕСЛИМН(F2:F1001;">=0,5";F2:F1001;"<=2")/1000, в английской версии
=COUNTIFS(F2:F1001,">=0.5",F2:F1001,"<=2")/1000. Получится что-то около 0,55. Нажмите F9 несколько раз: числа

меняются, а доля держится. Потом уберите два сомножителя или добавьте ещё пять и посмотрите, как доля удач падает.

Как метод ломается

Ошибки с одной стороны. Вся магия с корнем из n держится на независимости ошибок. Если Даша оценивала всё по своей семье, а её семья ест картошки больше среднего, то завышены будут сразу несколько сомножителей, и ошибки не погасят, а сложатся. В «Прикольной статистике» это называлось смещением (bias), и оно, в отличие от случайного разброса, не лечится ни числом сомножителей, ни числом наблюдений.

Слово «съедает». Даша считала картошку на тарелке. Тёща спрашивала, сколько у людей картошки уходит за год, а в это входят ещё и семенная, и сгнившая, и отданная соседке. А для погреба нужна третья цифра: сколько лежит зимой одновременно. Такая же история случается и в официальных цифрах. По обследованию домохозяйств Росстата, в 2023 году в России съедали около 55 килограммов картошки на человека в год, а в данных Продовольственной и сельскохозяйственной организации ООН встречается 87. Оба числа честные, просто первое считает съеденное дома, а второе всё, что страна вырастила и ввезла для еды, вместе с чипсами и потерями. Дашины две картофелины в день дают 73 килограмма, и это как раз между ними. Прежде чем оценивать, договоритесь, что именно вы считаете. Об этом же говорила первая глава: модель начинается с вопроса.

Число из зала. Когда кто-то крикнул «сто тонн», это число засело в голове у всего зала. Психологи Амос Тверски и Даниэль Канеман, уже знакомые читателю «Прикольной статистики» по задаче о двух роддомах, назвали это якорением (anchoring). В их опыте 1974 года люди сначала видели случайное число на колесе фортуны, а потом оценивали долю африканских стран в ООН. Увидевшие 10 называли в среднем 25%, увидевшие 65 называли 45%, хотя колесо к Африке отношения не имело. Разбор на сомножители помогает и тут: про две картофелины в день чужой крик ничего не сказал.

Сомножители, о которых никто ничего не знает. Корень из n спасает, когда каждый сомножитель известен хотя бы в пределах двух-трёх раз. Если же о каком-то из них можно сказать только «от одной миллиардной до единицы», он один перевешивает все остальные, и оценка превращается в палец, ткнутый в небо. Как это выглядит, видно на самой знаменитой оценке Ферми в истории, в следующем разделе.

Оценка вместо измерения. И наконец, оценка Ферми годится, когда нужен порядок. Если бы председатель закупал картошку по сто рублей за килограмм, пять лишних тонн стоили бы полмиллиона, и тут уже лучше тёща с тетрадью. Хороший моделист сначала спрашивает, чего стоит ошибка, и только потом решает, оценивать или идти по участкам.

Где это работает всерьёз

Ферми и листки бумаги. Итальянский физик Энрико Ферми, нобелевский лауреат 1938 года, славился умением за пару минут получать правильный порядок там, где другие считали неделями. Самый известный случай связан с тем же испытанием 16 июля 1945 года, о котором шла речь в прошлой главе. Ферми находился примерно в 16 километрах от места взрыва. Когда подошла ударная волна, он выпустил из руки клочки бумаги и измерил, насколько их отнесло: около двух с половиной метров. По этому числу он оценил мощность взрыва примерно в 10 тысяч тонн тротила. По современным данным было около 21–25 тысяч, причём часть энергии ушла в излучение и бумагу не двигала. Ошибка примерно вдвое, по горсти бумажек, без приборов: для оценки Ферми это идеальный результат.

Студентов Ферми, по преданию, учил на вопросах вроде «сколько в Чикаго настройщиков пианино». Жители, доля семей с пианино, как часто их настраивают, сколько инструментов за день успевает настроить один мастер: та же схема, что у Даши с картошкой. С тех пор такие задачи дают на физических олимпиадах и на собеседованиях, а инженеры называют их расчётами на обороте конверта (back-of-the-envelope calculation). На таких расчётах начинается почти каждый проект: прежде чем месяц строить точную модель,

стоит за пять минут узнать, нужна ли она вообще.

Уравнение Дрейка. В 1961 году в американской радиообсерватории в Грин-Бэнке прошла первая конференция по поиску внеземных цивилизаций. Чтобы у обсуждения был план, астроном Фрэнк Дрейк записал оценку Ферми на космический манер. Число цивилизаций в нашей Галактике, с которыми можно связаться, равно произведению семи сомножителей. Это скорость рождения звёзд, доля звёзд с планетами, число пригодных для жизни планет, доля тех, где жизнь возникла, доля тех, где она стала разумной, доля тех, что посылают сигналы, и время, в течение которого цивилизация их посылает.

Первые два-три сомножителя астрономы знают неплохо, особенно сейчас, когда планеты у других звёзд находят тысячами. А вот о доле планет с разумом и о сроке жизни цивилизации мы знаем только один пример, наш собственный. Участники встречи 1961 года пришли к выводу, что число цивилизаций примерно равно сроку их жизни в годах, и назвали разброс от тысячи до ста миллионов. Современные авторы, подставляя свои значения, получают что угодно, от «мы одни в Галактике» до миллионов соседей. Это и есть случай сомножителей, о которых никто ничего не знает.

И всё же уравнение Дрейка считают одной из самых полезных формул в астрономии. Его ценность не в ответе, а в разборе: оно сразу показало, где кончаются знания и начинаются догадки, и что надо измерить прежде всего. Так и с

погребом: если бы Даша не знала, сколько народу в товариществе, тёще стоило бы обойти участки и выяснить только это число, без чаепитий про картошку. Оценка Ферми подсказывает, что измерять.

Задачи

Задача 1. Погреб. Тёща насчитала 12 тонн картошки. Кубометр насыпанной картошки весит, условно, 650 килограммов, и погреб надо строить в полтора раза больше, чтобы пройти между закромами. Сколько кубометров копать?

Ответ. 12 / 0,65 примерно 18,5 кубометра, с запасом около 28. Это яма примерно 3 на 3 на 3 метра. Председатель тут же посчитал, что на каждый из 80 участков приходится меньше полукубометра земли, и объявил субботник.

Задача 2. Чужой чай. Кузьмич три раза в день заходит к соседям посоветовать и каждый раз выпивает полторы чашки по четверти литра. Сколько чужого чая он выпивает за лето из 90 дней?

Ответ. $3 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}25 \cdot 90$ примерно 100 литров, полбочки из второй главы. Кузьмич считает, что это справедливая плата за советы, соседи считают, что советы идут в нагрузку к чаю.

Задача 3. Комары. Председатель спросил, сколько комаров живёт на участке у пруда. Никто не знает, но все согласны, что больше ста и меньше миллиона. Какое число назвать?

Ответ. Среднее геометрическое: корень из $100 \cdot 1\,000\,000$, то есть 10 000. От него до обоих краёв сто раз. Середина отрезка, полмиллиона, отстояла бы от верхнего края всего в два раза, а от нижнего в пять тысяч раз. Комары отнеслись

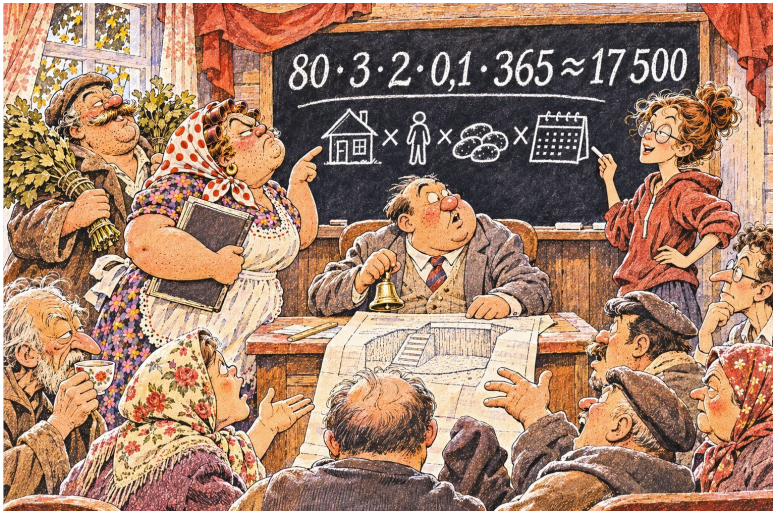
к оценке с интересом и вечером пришли проверять председателя лично.

Задача 4. Худший случай. Оценка состоит из трёх сомножителей, каждый известен с точностью до трёх раз в любую сторону. Во сколько раз может ошибиться итог в худшем случае и как часто он окажется в пределах трёх раз?

Ответ. В худшем случае в $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ раз. Но прогон по Монте-Карло, как в блоке «Попробуйте в таблице», показывает, что в двух случаях из трёх итог укладывается в три раза. Пессимист помнит о двадцати семи, оптимист о трёх, а статистик о том, что оба правы с разной вероятностью.

Задача 5. Веники. Баню топят раз в неделю, в ней парятся четверо, одного веника хватает на два раза парильщика. Сколько веников заготовить на год из 52 недель?

Ответ. $4 \cdot 52 / 2 = 104$ веника, на круглое счёта сотня. Петрович вяжет сто двадцать, потому что знает смещение в своей модели: в баню всегда приходит Кузьмич со своим мнением и без своего веника.


80 · 3 · 2 · 0,1 · 365 ≈ 17 500

Глава 5. Было, прибавилось, стало

Во второй главе Петрович узнал, сколько воды даёт крыша сарая с одного дождя, и успокоился. Ненадолго. Бочка в 200 литров стоит под водостоком, а рядом растёт укроп, который каждый вечер просит ведро и ещё одно. Дождь то льёт, то неделю не появляется. И вопрос у Петровича теперь не «сколько натечёт», а «до какого дня хватит». Формула из второй главы описывала одну грозу. А жизнь бочки состоит из многих дней подряд, и каждый следующий начинается с того, чем кончился предыдущий.

Тёща, услышав вопрос, молча открыла тетрадь. У неё давно заведена страница «Бочка»: каждый вечер она смотрит, до какого обруча стоит вода, и записывает. Рядом страница «Дрова», где на каждую субботу три колонки: сколько было, сколько привезли, сколько сожгли. И ещё страница «Огурцы», про которую будет в задачах. Тёща считает, что любое хозяйство можно описать тремя словами: было, прибавилось, стало.

Даша заглянула в тетрадь через плечо и сказала, что прабабушка, сама того не зная, ведёт разностное уравнение. Тёща ответила, что ничего разностного у неё нет, всё одинаково аккуратно.

Петрович сначала решил дело по-мужски, одним делением. Бочка 200 литров, на укроп уходит 20 в день, значит, хва-

тит на десять дней. Это честная модель, но она верна только в одном случае: если бочка сейчас полная и дождя не будет вовсе. А бочка наполовину пустая, и во вторник обещали дождь. Одним делением тут не обойтись.

Здравый смысл тёщи тут точнее здравого смысла Петровича. Не надо угадывать всё лето сразу. Достаточно знать, сколько в бочке сегодня, и что с ней произойдёт за сутки: сколько нальёт дождь и сколько заберёт лейка. Завтрашнее число получается из сегодняшнего, послезавтрашнее из завтрашнего, и так до сентября. Каждый шаг простой, как сложение в магазине, а вместе они дают то, чего не даст никакое деление: целую историю бочки.

Во второй главе такие модели были названы динамическими и дискретными: они описывают, как что-то меняется во времени, а время идёт рывками, по суткам, неделям, месяцам. Теперь пора разобраться, как они устроены. С этой главы начинается большая часть книги, потому что почти всё дальше, от ряски в пруду до эпидемий и сражений, будет той же тёщиной страницей с тремя колонками, только с более хитрыми правилами.

Состояние, шаг, параметр

Даша переписала тёщину страницу одной строчкой. Пусть x с индексом n означает, сколько литров в бочке вечером n-го дня. Тогда вечером следующего дня в ней будет столько же, плюс то, что налил дождь, минус то, что унесла лейка. Такая запись называется разностным уравнением (difference equation), или рекуррентным соотношением (recurrence relation): оно не даёт ответ сразу, а объясняет, как перейти от сегодня к завтра.

У каждой части такой модели есть своё имя, и имена эти пригодятся до конца книги. Число литров в бочке называется состоянием (state), а сама буква x переменной состояния (state variable). Состояние это всё, что надо знать о системе сегодня, чтобы посчитать её завтра; прошлое бочке уже не важно, вода не помнит, каким дождём пришла. Сутки называются шагом (time step). Вода в понедельник вечером, 120 литров, это начальное условие (initial condition), с него всё начинается. Числа, которые внутри модели не меняются, называются параметрами (parameters). Здесь их три: 18 литров с каждого миллиметра дождя (крыша 20 квадратных метров и коэффициент 0,9 из второй главы), 20 литров на полив и 200 литров ёмкости. А дождь по дням приходит снаружи, из прогноза или из жизни; это входные данные (input).

Формула 1. Было, прибавилось, стало

$$x_{n+1} = x_n + \text{приток}_n - \text{отток}_n$$

x — состояние (литры в бочке вечером), n — номер шага (сутки)
разностное уравнение (difference equation): завтра считается из сегодня

Вторник, дождь 5 мм:	$120 + 18 \cdot 5 - 20 = 190$ л
Среда, дождь 10 мм:	$190 + 18 \cdot 10 = 370$ → бочка держит 200
	200 − 20 = 180 л

18 л на мм дождя: крыша 20 м² · 0,9; полив укропа 20 л в день



Посчитаем. В понедельник вечером в бочке 120 литров. Во вторник выпало 5 миллиметров: 120 + 18 · 5 - 20 = 190. В среду 10 миллиметров, и тут арифметика впервые спотыкается о железо: 190 + 180 = 370, а бочка держит только 200, остальное утекло в укроп без спроса. Вечером Петрович зачерпнул свои 20, осталось 180. Дальше дождей не было, и каждый вечер уровень падал на 20: 160, 140, 120 и так до нуля. Бочка опустела в пятницу следующей недели, на одиннадцатый день. Деление Петровича ошиблось всего на сутки, и не потому, что оно хорошее: просто после среды бочка оказалась почти полной, и дальше попала в тот единствен-

ный случай, для которого оно верно. Разностное уравнение справилось бы и с любым другим летом.

Заметьте, что в среду пришлось решить, что идёт раньше. Дождь был днём, полив вечером, поэтому сначала бочка наполнилась до краёв, потом из неё взяли. Если бы Петрович полил утром, до дождя, то из 190 осталось бы 170, дождь добавил бы 180, и вечером бочка стояла бы полная, 200 литров. Одни и те же числа, а итог разный на двадцать литров. Пока бочка не упирается в край, порядок не важен: сложение и вычитание можно переставлять. Но стоит появиться ограничению (constraint), вроде «не больше 200» или «не меньше нуля», и модель обязана сказать, что происходит внутри шага и в каком порядке.

Кузьмич и равновесие

Теперь тёщина страница «Дрова». Каждую субботу Петрович колет и складывает в сарай полкуба дров, числа здесь условные. А Кузьмич заходит посоветовать и уносит для своей печки несколько охапок, в долг до весны. У Кузьмича своя совесть: когда дров много, он берёт смело, когда мало, стесняется. Тёща по своим записям вывела, что он уносит за неделю десятую часть того, что видит в сарае.

В бочке отток был постоянным, 20 литров. Здесь отток зависит от самого состояния: x следующей недели равен x плюс 0,5 минус 0,1 · x. Пусть к началу осени в сарае лежит девять кубов, Петрович заготовил их за лето. Через неделю их 9 + 0,5 - 0,9 = 8,6, через две 8,24, через десять около 6,4, через двадцать около 5,5. А если бы сарай был пуст, то запас рос бы: 0,5, потом через десять недель около 3,3, через двадцать около 4,4. Оба ряда чисел тянутся к одному и тому же числу, к пяти.

Пять находится без всяких таблиц. Запас перестаёт меняться, когда приток равен оттоку: 0,5 = 0,1 · x, то есть x = 0,5 / 0,1 = 5 кубов. Такая точка называется равновесием (equilibrium), или неподвижной точкой (fixed point): если система в ней оказалась, то там и останется. В общем виде равновесие равно притоку, делённому на долю оттока. И оно не просто существует, а притягивает: каждую неделю расстоя-

ние до пяти кубов умножается на 0,9, и за шесть-семь недель оно сокращается вдвое, откуда бы запас ни стартовал. Такое равновесие называют устойчивым (stable).

Петрович прослушал это мрачно. Выходит, сколько дров ни заготови, Кузьмич подровняет запас до пяти кубов. Даша поправила: до пяти при нынешних параметрах. Начальное условие дедушка меняет топором, и модель его забывает. А параметр меняется замком на сарае, и тогда меняется всё. Отток, пропорциональный запасу, мы ещё встретим в седьмой главе: так остывает пирог и распадается радиоактивный углерод.

Кролики с памятью

Сёмка услышал, что взрослые считают дрова, и попросил посчитать что-нибудь живое. Например, кроликов, которых он давно просит у деда. Даша обрадовалась: про кроликов есть одна из самых знаменитых задач в истории математики, и ей больше восьмисот лет.

В 1202 году Леонардо из Пизы, известный как Фибоначчи, написал «Книгу абака» (Liber Abaci), с которой в Европе начали распространяться арабские цифры. Среди задач для купцов там есть такая. В загон посадили пару кроликов. Каждая взрослая пара каждый месяц приносит новую пару, новорождённые начинают рожать через месяц, и никто не умирает. Сколько пар будет через год?

Попробуем описать это как бочку: было столько-то пар, прибавилось столько-то. И сразу затруднение: сколько прибавится, зависит не от того, сколько пар сейчас, а от того, сколько из них взрослые. А взрослые сейчас это все, кто уже был месяц назад. Значит, пар в следующем месяце будет столько, сколько есть сейчас, плюс столько, сколько было месяц назад. Одного числа на сегодня не хватает, нужно ещё вчерашнее.



Посчитаем по Фибоначчи, у него первая пара уже взрослая. Через месяц пар две, через два три (старая пара родила ещё раз, молодая пока растёт), через три пять, дальше 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 и через год 377. Это число и стоит в ответе у самого Фибоначчи, а ряд 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, в котором каждое число равно сумме двух предыдущих, с тех пор называется числами Фибоначчи (Fibonacci numbers).

У бочки и дров завтра зависело только от сегодня, такие уравнения называют уравнениями первого порядка. У кроликов завтра зависит от сегодня и вчера, это уравнение второго порядка. Можно сказать иначе: состояние кроличьего загона описывается не одним числом, а двумя: сколько взрослых пар и сколько молодых. Выбор состояния это первое и главное решение моделиста. Забудете что-то важное, и

никакая арифметика потом не поможет.

А теперь разделите каждое число ряда на предыдущее. Получится 2, потом 1,5, потом 1,667, 1,6, 1,625, и дальше отношение всё точнее садится на 1,618. Это число, равное единице плюс корень из пяти, делённые на два, давно известно архитекторам и художникам как золотое сечение (golden ratio) и обозначается греческой буквой фи. Для моделиста же важно другое: через несколько месяцев кроликов становится каждый месяц примерно в 1,6 раза больше. Не прибавляется поровну, как вода в бочке, а умножается на одно и то же число. Такой рост называется экспоненциальным, и ему посвящена следующая глава.

Попробуйте в таблице. Электронная таблица будто придумана для разностных уравнений: каждая строка это шаг, и ячейка смотрит на строку выше. В столбец A запишите номера дней от 0 до 30, в столбец B дождь в миллиметрах (можно взять из архива погоды или придумать), в C2 начальное условие, 120. В C3 запишите само уравнение с обоими ограничениями: =МАКС(0;МИН(C2+18*B3;200)-20), в английской версии =MAX(0,MIN(C2+18*B3,200)-20). Здесь сначала дождь, потом перелив через край, потом полив, и ниже нуля бочка не опустится. Протяните формулу вниз и постройте столбчатую диаграмму по столбцу C. Теперь приделайте к сараю вторую бочку: замените 200 на 400 и посмотрите, на сколько дней отодвинется сухой день. Важный совет: параметры лучше вынести в отдельные ячейки, например 18

в F1, 200 в F2 и 20 в F3, и ссылаться на них со знаком доллара: =МАКС(0;МИН(C2+$F$1*B3;$F$2)-$F$3). Тогда модель пересчитывается правкой одной ячейки, и видно, что в ней параметр, а что состояние.

Кролики делаются ещё проще. В H1 и H2 поставьте единицы, в H3 формулу =H1+H2 и протяните вниз. Рядом, в I3, посчитайте отношение =H3/H2 и посмотрите, как быстро оно садится на 1,618. А потом замените начальные единицы на что угодно, хоть на 7 и 100: сами числа станут другими, а отношение всё равно придёт к тем же 1,618.

Как метод ломается

Забытый поток. По Дашиной модели бочка должна была опустеть в пятницу, а опустела в среду, на два дня раньше. Тёща провела расследование и выяснила, что вода ещё и испаряется, а Кузьмич по утрам черпает из бочки для самовара, потому что дождевая вода мягче. Вместе выходит пять литров в день, незаметных за один день, а за десять дней это уже пятьдесят литров, два с половиной полива. У разностных уравнений такая беда: каждый шаг строится на предыдущем, и ошибка в одну сторону не гаснет, как в оценке Ферми, а накапливается. Это то самое смещение из прошлой главы, только растянутое во времени. Интересно, что с дровами всё наоборот: ошибку в начальном запасе Кузьмич сам исправляет, каждую неделю срезая её на десятую часть. Системы с устойчивым равновесием прощают ошибки в начальном условии, но не ошибки в параметрах.

Шаг во всю длину. Тёща решила сэкономить на записях и считать дрова не по неделям, а по кварталам, по 12 недель. Логика простая: за квартал Петрович привозит шесть кубов, а Кузьмич уносит двенадцать десятых, то есть 1,2 от того, что видит. Уносить больше, чем лежит, не умеет даже Кузьмич, но модель об этом не знает. Она получает из девяти кубов 4,2, потом 5,16, 4,97, то есть прыгает вокруг пяти, хотя на самом деле запас спокойно сползает к ней. А с шагом в полго-

да выходит что-то совсем дикое: минус 0,6 куба, потом плюс 12,8, потом минус 6, и с каждым полугодием размах растёт. Дрова в минусе существуют только в плохой модели. Правило такое: за один шаг состояние должно меняться немного. Если за шаг уходит всё и даже больше, шаг надо дробить. На самом деле за 12 недель Кузьмич уносит не 120%, а около 72% запаса, потому что каждую неделю берёт долю от уже уменьшившегося. Про то, как выбирать шаг, будет отдельный разговор, когда дойдём до дифференциальных уравнений.

Бессмертные кролики. У Фибоначчи кролики не умирают, не болеют и не сидят в тесноте. Для задачника XIII века это нормально, задача была про сложение, а не про звероферму. Но попробуйте продолжить ряд: через два года у вас будет больше ста двадцати тысяч пар, через три около сорока миллионов. Ни одна настоящая популяция так расти долго не может: рано или поздно кончаются место и трава. Модель без ограничений хороша для начала истории и непригодна для её середины. Как добавить в неё тесноту, будет рассказано в одной из следующих глав.

Параметр, который не постоянен. В модели аппетит Кузьмича равен десятой части в неделю всегда. В жизни в декабре он топит печь чаще, а в августе вообще спит на сеновале. Параметр постоянен только в пределах того, что мы согласились считать постоянным. Если он заметно меняется, у моделиста два пути: сделать его зависящим от времени или

погоды (то есть перевести во входные данные) или признать, что модель годится только на сезон. И то и другое честно, нечестно только не сказать.

Где это работает всерьёз

Склад и бухгалтерия. Тёщина страница с тремя колонками на самом деле одна из самых распространённых моделей на свете. Остаток на начало плюс приход минус расход равно остатку на конец: так ведут склад, банковский счёт, ведомость на горючее в автопарке и учёт продовольствия в воинской части. В экономике и теории систем такую пару понятий называют запасом и потоком (stock and flow): запас измеряется на момент времени (литры, кубы, рубли), поток за промежуток (литры в день, рубли в месяц). Путать их опасно: зарплата это поток, сбережения это запас, и многие семейные споры идут от того, что одна сторона говорит про первое, а другая про второе.

Машина с водой и системная динамика. Во второй главе была машина MONIAC, в которой деньги страны изображала вода в баках и трубках. Это ровно та же схема: баки это запасы, трубки это потоки, только течёт непрерывно. В середине 1950-х инженер Джей Форрестер из Массачусетского технологического института сделал из таких запасов и потоков целое направление, системную динамику (system dynamics). Начал он с заводов, складов и заказов, а кончил моделью всего мира, на которой построен знаменитый доклад «Пределы роста» 1972 года. К нему мы ещё вернёмся. Строится такая модель так же, как бочка Петровича, только бочек десятки и

они соединены между собой.

Берлинский воздушный мост. В июне 1948 года наземные дороги в Западный Берлин были перекрыты, и нападные союзники решили снабжать город с населением больше двух миллионов человек по воздуху. Вся операция планировалась как большая бочка: запас угля и продовольствия в городе завтра равен запасу сегодня плюс то, что привезли самолёты, минус то, что съели и сожгли. Минимальная потребность оценивалась примерно в 4500 тонн в сутки. Пока самолёты возили меньше, запасы таяли, и срок, на который их хватит, считался тем самым делением Петровича: запас на суточный недобор. Управлять приходилось именно параметром притока: числом самолётов, рейсов и взлётных полос. К весне 1949 года самолёты возили уже больше 8 тысяч тонн в сутки, а на Пасху за одни сутки доставили 12 941 тонну за 1383 рейса. Приток стал больше оттока, и запасы поползли вверх. В мае 1949 года дороги открыли, но воздушный мост продолжал работать до сентября, чтобы накопить запас на зиму. Всего по воздуху было доставлено около 2,3 миллиона тонн грузов.

Таблетка каждый день. Модель Кузьмича с дровами работает и в медицине. Человек принимает лекарство раз в сутки, это постоянный приток. Организм за сутки выводит определённую долю того, что в нём есть, это отток, пропорциональный запасу. Значит, количество лекарства в крови стремится к равновесию, как дрова в сарае. Фармакологи называют

его равновесной концентрацией (steady-state concentration) и считают, что она устанавливается примерно за пять периодов полувыведения. Поэтому у многих лекарств действие развивается не с первой таблетки, а через несколько дней, и поэтому врачи строго следят за дозой и расписанием: удвойте приток, и равновесие тоже удвоится. Про полувыведение подробно расскажет седьмая глава.

Задачи

Задача 1. Бочка зятя. У зятя бочка на 300 литров, сейчас полная. Зять каждый вечер берёт 25 литров на полив, а тёща каждое утро доливает туда 10 литров из колодца, потому что считает, что зять поливает неправильно. Дождей нет. Через сколько дней бочка опустеет?

Ответ. За сутки уровень падает на 25 - 10 = 15 литров, 300 / 15 = 20 дней. Строго говоря, первые тёщины 10 литров в полную бочку прольются мимо, но итога это почти не меняет. Приток и отток постоянные, и только поэтому тут работает деление Петровича. Заметим, что тёща за это время перенесла 200 литров, то есть сама фактически полила огород зятя через его бочку и его руками. Зять предложил упростить схему, но его не слушали.

Задача 2. Огурцы. К первому ноября в погребе 48 банок. Семья открывает три банки в неделю, а тёща раз в четыре недели несёт две банки председателю, чтобы не забывал, чей обход помог спроектировать погреб. Хватит ли огурцов до марта?

Ответ. Нет. После двенадцати недель останется 48 - 36 - 6 = 6 банок, и на четырнадцатой неделе, в начале февраля, погреб опустеет. За 17 недель до марта нужно 51 + 8 = 59 банок, не хватает одиннадцати. Тёща предложила урезать отток семьи, а не отток председателю, потому что у второго потока

есть обратная связь, а у первого только аппетит.

Задача 3. Замок. Кузьмич осмелел и стал уносить не десятую, а пятую часть дров в неделю. Каким станет равновесие? Сколько дров в неделю должен колоть Петрович, чтобы вернуть свои пять кубов? И что будет, если повесить на сарай замок?

Ответ. Равновесие $0{,}5 / 0{,}2 = 2{,}5$ куба. Чтобы вернуть пять, нужно колоть $0{,}2 \cdot 5 = 1$ куб в неделю, вдвое больше, и половина этой работы уйдёт на отопление дома Кузьмича. С замком доля оттока равна нулю, равновесия нет, и дрова растут на полкуба в неделю без конца. Зато у Кузьмича появляется новая переменная состояния, обида, и она тоже растёт каждую неделю.

Задача 4. Кролики Сёмки. Кузьмич согласился купить внуку пару новорождённых кроликов первого июня на одном условии: к первому декабря их должно быть не больше десяти пар. Укладываются ли кролики Фибоначчи в условие?

Ответ. Нет. Новорождённые сначала месяц растут, поэтому ряд идёт с единицы дважды: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13. К декабрю 13 пар, двадцать шесть кроликов. Кузьмич изучил расчёт и добавил в модель новый параметр, согласие деда, и присвоил ему значение ноль. Сёмка получил одного кролика, и для него разностное уравнение выглядит очень спокойно.

Задача 5. Дырявая бочка. Старая бочка течёт так, что за сутки теряет 5% того, что в ней есть: чем выше вода, тем

сильнее давит на дырку. Дождя и полива нет. Сколько останется из 200 литров через две недели?

Ответ. Каждый день уровень умножается на 0,95, за 14 дней на 0,95^14, примерно на 0,49. Останется около 98 литров, почти ровно половина. И через следующие две недели снова половина от половины, и так далее, до полного нуля дело никогда не дойдёт. Зять заклеил дыру, и закон «половина за две недели» перешёл на его терпение к советам тёщи. Подробно про такие половины в седьмой главе.



Глава 6. Ряска в пруду

В товариществе есть пруд, тот самый, у которого в четвёртой главе председатель считал комаров. В июле на нём появилось зелёное пятно ряски с обеденный стол. Председатель осмотрел его, прикинул, что это квадратный метр из ста квадратных метров зеркала воды, всего один процент, и назначил субботник по чистке пруда на конец месяца, после погреба. Кузьмич одобрил: за неделю пятно едва ли стало больше, чего суетиться.

Даша посмотрела на пятно, потом на календарь и сказала, что к концу месяца чистить будет нечего: весь пруд станет одним зелёным ковром дней через тринадцать. За неделю пятно выросло с тарелки до стола, и на глаз это немного. Но через девять дней оно будет размером с крышу сарая, а ещё через четыре с половиной дня закроет весь пруд. Кузьмич спросил, с чего вдруг ряска начнёт торопиться, если до сих пор не торопилась. Даша ответила, что ряска и не собирается торопиться. Она всё время делает одно и то же, вдвое за двое суток, а торопиться придётся председателю.

Здравый смысл Кузьмича не глупый, он просто считает не так, как растёт ряска. За неделю прибавилось меньше квадратного метра, значит, и дальше будет прибавляться по метру в неделю, и до ста метров ряска доберётся года через два. Так рассуждал в прошлой главе Петрович про бочку, и там

это было почти верно: лейка забирала поровну каждый день. Такой способ продлить увиденное в будущее называется линейной экстраполяцией (linear extrapolation): как прибавлялось раньше, так и будет.

Но ряска не лейка. Каждое её растение делится на два, и чем больше ряски, тем больше растений делится одновременно. Прирост не постоянный, он пропорционален тому, что уже есть. Первая неделя наблюдений показала метр, следующая покажет одиннадцать, а третья пруд целиком. Люди плохо чувствуют такой рост, и это хорошо известно психологам. Даже образованные взрослые, когда оценивают на глаз сложные проценты или рост чего угодно, обычно сильно занижают ответ. У этой ошибки даже есть название: смещение экспоненциального роста (exponential growth bias).

Есть старая загадка, которую часто рассказывают именно про пруд. Кувшинки на пруду каждый день удваиваются и за тридцать дней закрывают весь пруд. В какой день была закрыта половина? Рука сама тянется написать «в пятнадцатый», а правильный ответ в двадцать девятый, за день до конца. А в двадцать пятый день, за пять дней до катастрофы, кувшинки занимали три процента пруда, и никто из дачников не видел повода беспокоиться.

Умножать, а не прибавлять

Запишем ряску на тёщиной странице из прошлой главы: было, прибавилось, стало. Пусть x это площадь ряски, а за сутки прибавляется доля r от того, что уже есть. Тогда завтра ряски будет $x + r \cdot x$, то есть $(1 + r) \cdot x$. Это тот же Кузьмич с дровами, только наоборот: там запас убывал пропорционально себе, здесь прибывает. Каждый шаг умножает состояние на одно и то же число $1 + r$, которое называют множителем роста, а само r темпом прироста (growth rate).

У такого разностного уравнения есть приятная особенность: его не надо просчитывать шаг за шагом. За n шагов начальное число умножится на $1 + r$ ровно n раз, и ответ записывается сразу. Математики называют такой ответ явным решением (closed-form solution). Число шагов тут стоит в показателе степени, по-латыни exponens, отсюда и название: экспоненциальный рост (exponential growth).

Формула 1. Экспоненциальный рост

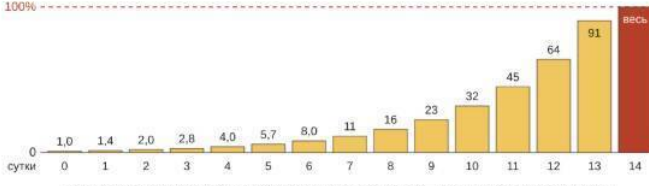
$$x_n = x_0 \cdot (1 + r)^n$$

x_0 — сколько было, r — прирост за шаг (доля), n — число шагов
каждый шаг умножает, а не прибавляет: (1 + r) — множитель роста

Ряска удваивается за двое суток: $1 + r = \sqrt{2} \approx 1{,}414$ в сутки.

Сегодня 1% пруда. Через 10 суток: $1 \cdot 1{,}414^{10} \approx 32\%$.

Весь пруд: $2 \cdot \log_2 100 \approx 13{,}3$ суток.



первую неделю ряски меньше 10%; последние двое суток — от половины до всего пруда

У председательского пруда площадь сто квадратных метров, и ряска, по условию, удваивается за двое суток. Множитель за сутки тогда равен корню из двух, примерно 1,414: дважды умножив на него, получим ровно два. Темп прироста около 41% в сутки. Сегодня ряска занимает один процент пруда, через десять суток 1 · 1,414^10, примерно 32%, а весь пруд закроется через 13 с небольшим суток. На рисунке видна главная черта экспоненты: первую неделю почти ничего не происходит, а потом всё происходит сразу.

Время удвоения

У экспоненциального роста есть след. Сколько бы ряски ни было, с тарелку или с полпруда, вдвое больше её станет за одно и то же время. Это время называется временем удвоения (doubling time). У линейного роста такого нет: бочка Петровича после дождя наполнялась с нуля до ста литров так же долго, как со ста до двухсот, а удвоение со ста до двухсот занимало вдвое больше времени, чем с пятидесяти до ста.

Время удвоения находится из условия $(1 + r)$ в степени T равно двум. Прологарифмировав, получаем $T = \ln 2 / \ln(1 + r)$, где ln это натуральный логарифм, кнопка есть на любом инженерном калькуляторе. А для счёта в уме есть приём проще. При маленьком r логарифм из $1 + r$ почти равен самому r, а $\ln 2$ примерно 0,693. Значит, время удвоения примерно равно 70, делённому на темп прироста в процентах. Это правило 70 (rule of 70). Экономика растёт на 7% в год: удвоится за десять лет. Вклад под 10% годовых с капитализацией удвоится за семь с небольшим. Банкиры часто берут не 70, а 72, потому что 72 делится нацело на 2, 3, 4, 6, 8, 9 и 12.

Формула 2. Время удвоения и правило 70

$$T_2 = \ln 2 / \ln(1 + r) \approx 70 / r(\%)$$

T_2 — за сколько шагов величина вдвое больше; ln 2 = 0,693 — отсюда «семьдесят»
правило 70 (rule of 70) хорошо работает для прироста в несколько процентов

Прирост за шаг	Точно: ln 2 / ln(1 + r)	Правило 70
1%	69,7	70
2,8% (Мальтус, в год)	25,0	25
7%	10,2	10
10%	7,3	7
41% (ряска, в сутки)	2,0	1,7
61,8% (кролики, в месяц)	1,44	1,13

При небольшом приросте правило 70 почти не ошибается.
При десятках процентов за шаг оно врёт — считайте точно.

Правило 70 придумано для небольших процентов. Вспомните кроликов Фибоначчи из прошлой главы: их становится в 1,618 раза больше каждый месяц, то есть темп прироста 61,8% в месяц. Правило 70 обещает удвоение за 1,13 месяца, а точная формула даёт 1,44. Кролики множатся не так быстро, как думает правило, но тоже впечатляюще.

Откуда всё-таки семьдесят? Если рост идёт не ступеньками раз в сутки, а непрерывно, каждую минуту по чуть-чуть, формула принимает вид x = x0 · e^(rt), где e примерно равно 2,718, это число Эйлера. Для непрерывного роста время удвоения равно 0,693 / r уже точно, без всякого «примерно». Подробнее про непрерывное время поговорим в главе про

дифференциальные уравнения.

И ещё один инструмент, без которого не обходится ни один моделист. Если по вертикальной оси откладывать не саму величину, а её логарифм, то есть ставить на оси деления 1, 10, 100, 1000 на равном расстоянии, крутая экспонента превращается в прямую линию. Такой график называется полулогарифмическим (semi-log plot). По нему сразу видно, экспонента перед вами или нет: если точки легли на прямую, темп прироста постоянный, а по наклону прямой можно снять время удвоения.

Попробуйте в таблице. В E1 запишите темп прироста, например 0,414. В столбец A номера суток от 0 до 20, в B2 начальную площадь, 1. В B3 запишите разностное уравнение =B2*(1+$E$1) и протяните вниз. Рядом, в C2, запишите явное решение =$B$2*(1+$E$1)^A2 и тоже протяните: столбцы совпадут до последнего знака. В E2 посчитайте время удвоения =LN(2)/LN(1+E1), а в E3 по правилу 70 =70/(E1*100). Функция LN в русской и английской версиях называется одинаково. Меняйте E1 от 0,01 до 1 и следите, когда правило начинает заметно ошибаться.

Теперь постройте точечный график по столбцам A и B. Получится та самая кривая, которая долго лежит на полу, а потом взлетает. Щёлкните правой кнопкой по вертикальной оси, выберите «Формат оси» и поставьте галочку «Логарифмическая шкала». Кривая станет прямой. А если в столбец D записать линейный рост Кузьмича =1+0,13*A2 (та же при-

бавка за неделю, размазанная по дням) и добавить на тот же график, на логарифмической шкале он превратится в пологую дугу. Так два вида роста различаются с первого взгляда.

Как метод ломается

Пруд кончается. Формула честно сообщает, что на четырнадцатые сутки ряска займёт 128% пруда, а на двадцатые тысячу процентов с лишним. На самом деле задолго до края пруда ряске станет тесно, не хватит света и питания, и рост замедлится. Экспонента хорошо описывает начало любого роста и ни разу в истории не описала его конец. Хуже того, на раннем этапе рост с будущим торможением и рост без него выглядят одинаково, и по первым точкам их не различить. Как добавить в модель тесноту, обещанную ещё кроликам Фибоначчи, расскажем в главе про логистический рост.

Ошибка в темпе. Даша замеряла пятно три дня подряд рулеткой, и со стороны она выглядела как человек, который измеряет лужу. Измерения дали темп где-то между 40% и 45% в сутки. Разница кажется пустяковой, но за тридцать суток она превращается в разницу почти втрое: 1,40 в тридцатой степени примерно 24 тысячи, 1,45 в тридцатой примерно 69 тысяч. В экспоненте ошибка темпа сидит в показателе степени и растёт вместе со сроком прогноза. Поэтому дальние прогнозы по экспоненте нужно давать с вилкой, а лучше не давать вовсе.

Темп, который меняется. В модели r параметр, в жизни он часто плывёт. Ряска в пасмурную неделю растёт медленнее, чем в солнечную. С населением Земли та же история, только

в веках. По оценкам ООН, первый миллиард людей набрался около 1804 года, второй около 1927-го, четыре миллиарда около 1974-го, восемь в ноябре 2022-го. Первое удвоение заняло 123 года, второе 47, третье 48. Значит, темп сначала рос с полпроцента в год до полутора, а потом перестал расти, и сейчас он снижается. С постоянным r эту историю не описать.

Проценты от разного. Тёща рассказала поучительную историю про сахар. В магазине его сначала подняли на 50%, а потом с большим шумом снизили на 50%, и все решили, что цена вернулась. А она упала до 0,75 от начальной: $1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}75$. Тёща посчитала и закупила мешок. Проценты при росте и падении не складываются, а перемножаются, и средний темп за несколько лет считается не как среднее арифметическое, а через среднее геометрическое множителей, старого знакомого из четвёртой главы. Среднее геометрическое из 1,5 и 0,5 примерно 0,87, то есть в среднем цена падала на 13% за шаг, а среднее арифметическое процентов показало бы ноль, то есть соврало бы, что ничего не изменилось.

Где это работает всерьёз

Мальтус и два ряда чисел. В 1798 году английский священник и экономист Томас Мальтус выпустил «Опыт о законе народонаселения», одну из первых математических моделей общества. По данным о Северной Америке он решил, что население, когда ему ничто не мешает, удваивается каждые 25 лет, то есть растёт примерно на 2,8% в год. А еду, по его мнению, можно наращивать в лучшем случае на одно и то же количество за тот же срок. Мальтус выписал два ряда: люди 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, еда 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Через два с четвертью века, по его подсчёту, на 512 человек приходилось бы 10 порций еды, поэтому рост населения, считал Мальтус, всегда будет упираться в нехватку еды. Экспоненциальный рост в биологии с тех пор часто называют мальтузианским (Malthusian growth).

Прогноз не сбылся, и причины поучительны для моделиста. Первая причина: еда не захотела расти линейно. Урожайность выросла многократно благодаря удобрениям, новым сортам и машинам, и параметр «сколько еды даёт поле» оказался вовсе не постоянным. Вторая: темп роста населения тоже не постоянен, и там, где люди становились сытее и образованнее, детей рождалось меньше. Но сама идея Мальтуса, что любой рост рано или поздно упирается в предел, пережила его цифры. Читая Мальтуса, и Дарвин, и Уоллес,

каждый сам по себе, пришли к идее естественного отбора: если рождается больше, чем может выжить, то важно, кто именно выживет.

Цепная реакция. Энрико Ферми, знакомый по четвёртой главе, вошёл в историю ещё и как человек, который первым укротил экспоненту. Когда ядро урана делится, оно выпускает нейтроны, и часть из них раскалывает следующие ядра. Физики считают нейтроны поколениями, и модель тут та же, что у ряски: в следующем поколении нейтронов в k раз больше, чем в нынешнем. Число k называется коэффициентом размножения (multiplication factor). Если k меньше единицы, реакция затухает, как дырявая бочка. Если больше, растёт, как ряска. 2 декабря 1942 года в Чикаго заработал первый ядерный реактор, графитовая кладка с ураном под трибунами стадиона. Ферми медленно выдвигал регулирующий стержень и считал на логарифмической линейке, когда счёт нейтронов перестанет выходить на полочку и начнёт расти по экспоненте. Коэффициент размножения составил 1,0006, то есть каждое поколение было больше предыдущего всего на шесть сотых процента. Реактор работал 28 минут на мощности около полуватта, меньше ёлочной гирлянды, потом стержни вернули на место. Вся ядерная энергетика стоит на том, чтобы держать это число ровно у единицы: чуть меньше, и реактор гаснет, чуть больше, и мощность растёт как ряска на пруду.

Закон Мура. В 1965 году инженер Гордон Мур, позже

один из основателей компании Intel, заметил, что число транзисторов на одной микросхеме удваивается примерно каждый год. В 1975 году он поправил себя: раз в два года. Это не закон природы, а наблюдение, нарисованное на полулогарифмическом графике, но полвека оно держалось так хорошо, что производители планировали по нему свои разработки. Двадцать пять удвоений за полвека дают рост примерно в тридцать миллионов раз, и поэтому в телефоне в кармане транзисторов миллиарды, а в первых микросхемах их были единицы и десятки. И всё же закон Мура подчиняется первому пункту из раздела про поломки: транзистор нельзя сделать меньше атома, и в последние годы удвоения заметно замедлились.

Задачи

Задача 1. Новость. В восемь утра Кузьмич узнал, что председатель заказал для погреба железную дверь с двумя замками. Каждый, кто знает новость, за час успевает рассказать её одному соседу, который ещё не слышал. К которому часу новость будут знать на всех 80 участках?

Ответ. Число знающих каждый час удваивается: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Восемьдесят перекрывается на седьмом часу, то есть к трём часам дня знает всё товарищество. На последнем часу новость приходится рассказывать тем, кто уже слышал, и тут модель упирается в край пруда. Последним в товариществе новость узнал председатель, и дверь с двумя замками стала для него сюрпризом.

Задача 2. Шахматная доска. По старинной легенде, изобретатель шахмат попросил у правителя скромную награду: одно зерно пшеницы на первую клетку, два на вторую, четыре на третью и так далее до шестьдесят четвёртой. Зерно весит примерно 0,04 грамма, в мире выращивают около 800 миллионов тонн пшеницы в год. Сколько лет правителю пришлось бы расплачиваться сегодняшними урожаями всей планеты?

Ответ. Всего зёрен 2^64 - 1, примерно 1,8 · 10^19. Это около 740 миллиардов тонн, или больше девятисот лет мирового урожая. Причём последняя клетка в одиночку весит

столько же, сколько все предыдущие вместе, и ещё одно зерно. Тёща сказала, что правителю стоило сначала попросить у изобретателя таблицу в Excel, а потом уже соглашаться.

Задача 3. Обратный счёт. Ряска, удваивающаяся за двое суток, закрыла весь пруд 20 июля. Когда она занимала одну тысячную пруда, пятно с тарелку?

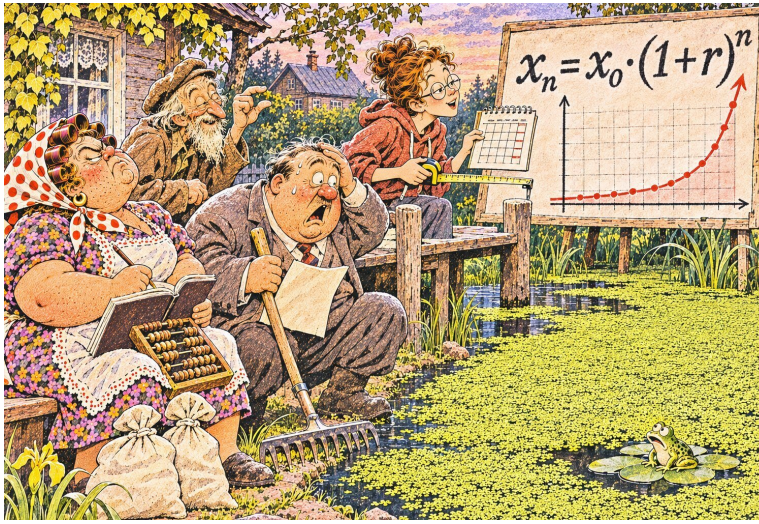
Ответ. Тысяча это примерно десять удвоений, ведь 2^10 = 1024. Десять удвоений по двое суток это двадцать суток, значит, тридцатого июня. Именно тогда председатель мог решить вопрос одним сачком. В это время он, как и положено, проектировал погреб.

Задача 4. Вклад. Тёща положила в банк 100 000 рублей под 10% годовых с ежегодной капитализацией, числа условные. Когда сумма удвоится и сколько будет через десять лет?

Ответ. По правилу 72 удвоение за 72 / 10, примерно 7,2 года, точно 7,27. Через десять лет 100 000 · 1,1^10, примерно 259 тысяч, а не 200, как насчитал Петрович, сложив десять раз по десять процентов. Правда, тёща напомнила, что цены в магазине тоже растут по экспоненте, и считать надо не рубли, а мешки сахара.

Задача 5. Сахар. Цена сахара каждый месяц растёт на 10%, числа опять условные. На сколько она вырастет за год?

Ответ. Не на 120%, а в 1,1^12, примерно в 3,14 раза, то есть на 214%. Тёща проверила расчёт на счётах и купила ещё два мешка. Теперь в её тетради новая страница, «Сахар», и в ней три колонки: было, прибавилось, и во сколько раз.



Глава 7. Остывший пирог

В воскресенье тёща испекла пирог с капустой, вынула его из духовки и поставила на стол под полотенцем. Резать горячим нельзя: начинка расползётся, а Сёмка, который уже сидел за столом с вилкой, обожжёт язык. Тёща сказала, что резать будет, когда пирог остынет до сорока градусов, и воткнула в середину кухонный термометр-щуп, подарок Даши к дню рождения. Термометр показал 90 градусов, на кухне было 20.

Через десять минут пирог остыл до 70, и тёща, как положено, записала это в тетрадь. Петрович старательно посчитал: за десять минут двадцать градусов, значит, по два градуса в минуту, и до сорока пирог дойдёт ещё через пятнадцать. Он поставил таймер на телефоне и взял нож. Даша попросила его заодно посчитать, сколько градусов будет у пирога через час. Петрович посчитал и получил минус тридцать. Таймер он выключил.

То, что пирог не остынет холоднее кухни, знает любой, кто забывал чай на столе. И столь же хорошо известно, что горячий чай остывает быстро, а тёплый долго и неохотно. Здравый смысл подсказывает, что скорость остывания зависит не от самой температуры, а от того, насколько пирог горячее всего вокруг. Пока разница большая, тепло уходит быстро. Когда разница маленькая, ему и уходить некуда.

Читатель этой книги такую зависимость уже встречал. В пятой главе Кузьмич уносил из сарая десятую часть дров: чем больше лежало, тем больше уносил. Там же дырявая бочка теряла 5% воды в сутки и за две недели теряла половину. А в шестой ряска росла тем быстрее, чем больше её было. У пирога тот же случай с обратным знаком: разница с кухней за каждую минуту теряет одну и ту же долю себя. Прямая Петровича подходит для лейки, которая черпает поровну, а пирог ведёт себя как Кузьмич с дровами.

Половина за половиной

Начнём с самого простого. Пусть за каждый шаг исчезает

доля k от того, что есть. Тогда на следующем шаге останется (1 - k) · x, а через n шагов x0 · (1 - k)^n. Это та же формула, что у ряски, только множитель меньше единицы. Такой процесс называется экспоненциальным распадом или затуханием (exponential decay). Всё, что в прошлой главе говорилось про рост, верно и здесь, с заменой «вдвое больше» на «вдвое меньше».

Вместо времени удвоения теперь период полураспада (half-life): время, за которое остаётся ровно половина. И опять главное свойство: от начального количества оно не зависит. Полная дырявая бочка из пятой главы теряет половину за 13,5 суток, и полупустая тоже за 13,5. Правило 70 работает и тут: теря 5% в сутки даёт 70 / 5 = 14 суток, очень близко.

У физиков такая формула описывает радиоактивный распад, и причина там красивая. Каждый атом радиоактивного изотопа за секунду распадается с одной и той же маленькой вероятностью, как бы долго он ни прожил. Атом не стареет и не помнит своего возраста. Читатель «Прикольной статистики» узнает здесь ту же идею, что и у монетки: монетке всё равно, сколько раз подряд выпадал орёл. А если каждый из миллиардов атомов распадается с постоянной вероятностью, то за секунду распадается постоянная доля тех, что ещё остались. Время здесь течёт непрерывно, поэтому формулу пишут через число e, а долю, исчезающую за единицу времени, обозначают греческой лямбдой и называют постоянной

распада (decay constant).

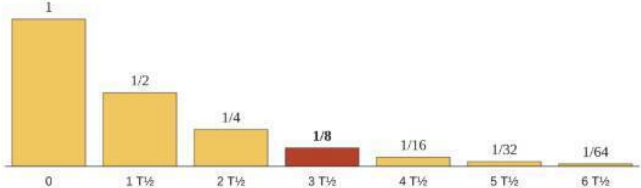
Формула 1. Экспоненциальный распад и период полураспада

$$N(t) = N_0 \cdot (1/2)^{t\,/\,T½}$$

T½ — период полураспада (half-life): за это время остаётся ровно половина
то же самое, что $N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, где $\lambda = \ln 2 / T½$ — постоянная распада

Радиоуглерод: T½ = 5730 лет. В находке осталась 1/8 углерода-14:

$1/8 = (1/2)^3$ → прошло три периода: 3 · 5730 = 17 190 лет.



каждый период полураспада отнимает половину того, что осталось; до нуля — никогда

Удобнее всего считать в периодах полураспада. Один период даёт половину, два четверть, три восьмую, десять тысячную долю (точнее, 1/1024). До нуля же экспонента не доходит никогда, и вопрос «когда распадётся всё» не имеет смысла, имеет смысл только «когда останется настолько мало, что можно не считать».

Пирог по Ньютону

В 1701 году в журнале Королевского общества вышла анонимная статья на латыни «Шкала степеней тепла». Автором был Исаак Ньютон. Среди прочего там была мысль, которую

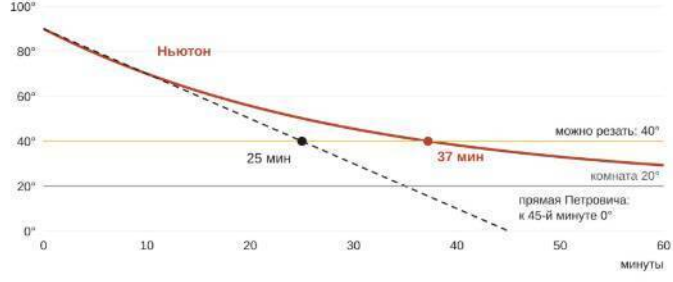
сегодня называют законом охлаждения Ньютона (Newton's law of cooling): скорость остывания тела пропорциональна разнице температур тела и окружающего воздуха. Значит, распадается не температура пирога, а его превосходство над кухней. Кухня же играет роль устойчивого равновесия, совсем как пять кубов дров у Петровича: с какой бы температуры пирог ни начинал, в конце концов будет комнатным.

Формула 2. Закон охлаждения Ньютона (1701)

$$T(t) = T_c + (T_0 - T_c) \cdot e^{-kt}$$

Tc — температура комнаты; остывает не температура, а разница с комнатой

пирог: Tc = 20 °C, T_0 = 90 °C, через 10 мин 70 °C → k ≈ 0,034 в минуту



Посчитаем вместе с Дашей. Разница с кухней сначала была 90 - 20 = 70 градусов, через десять минут 70 - 20 = 50. За десять минут она умножилась на 5/7, и этот множитель будет повторяться каждые десять минут. Через двадцать минут разница станет 50 · 5/7, примерно 36, и пирог будет 56

градусов. Через тридцать около 45. Сорок градусов значит разницу 20, а до неё от 70 надо спуститься в 3,5 раза. Из формулы получается 37 минут, а не 25, как у Петровича. На 25-й минуте пирог ещё горячий, около 50 градусов, и начинка бы потекла. Число k в формуле зависит от пирога и кухни: большой толстый пирог под полотенцем остывает медленнее, чем пирожок на сквозняке. Но для данного пирога на данной кухне его хватает одного измерения, и тёщина запись через десять минут оказалась именно тем измерением, которое нужно.

У таких процессов есть ещё одна характеристика, которую любят инженеры: постоянная времени (time constant), число 1 / k. У пирога она около 30 минут. За одну постоянную времени разница уменьшается в e раз, то есть процесс проходит на 63%, за три на 95%, за пять на 99%. Поэтому инженеры говорят, что переходный процесс заканчивается за три-пять постоянных времени, и тёщин пирог окончательно станет комнатным часа через два. Если до того времени доживёт.

Попробуйте в таблице. В E1 запишите k, 0,034, в E2 температуру кухни, 20. В столбец A минуты от 0 до 120, в B2 начальную температуру пирога, 90. В B3 запишите разностное уравнение с шагом в минуту =B2-$E$1*(B2-$E$2): за минуту пирог теряет долю k от своего превосходства над кухней. Рядом, в C2, запишите формулу Ньютона =$E$2+($B$2-$E$2)*EXP(-$E$1*A2), функция EXP называется одина-

ково в русской и английской версиях. Протяните оба столбца вниз и сравните: табличный пирог чуть-чуть холоднее точного, потому что за минуту разница на самом деле успевает немного уменьшиться, а таблица считает её постоянной. Это та самая ошибка шага, что и с дровами в пятой главе: сделайте шаг в десять минут, и расхождение станет заметным. А время, когда можно резать, считается сразу: =LN((40-E2)/(B2-E2))/(-E1).

Радиоуглеродный возраст считается одной ячейкой. В F1 запишите долю углерода-14, которая осталась в находке, например 0,6, а в F2 формулу =-5730*LOG(F1;2), в английской версии =-5730*LOG(F1,2). Получится около 4200 лет: логарифм по основанию два считает, сколько периодов полураспада уложилось в возраст находки.

Как метод ломается

Пирог не точка. В модели у пирога одна температура, а в жизни корка уже еле тёплая, а начинка в середине ещё обжигает. Модели, в которых целый предмет описывается одним числом, называются моделями с сосредоточенными параметрами (lumped models). Они годятся, когда тепло внутри предмета выравнивается быстрее, чем уходит наружу: для медной кружки да, для толстого пирога с капустой с натяжкой. Тёща интуитивно поступила правильно, воткнув щуп в самую середину: модель описывает ту точку, где стоит термометр, и ничего не обещает про остальные.

Закон, который сам приближённый. Ньютон наблюдал

за железом на ветру, и для таких условий закон держится неплохо. Но когда воздух вокруг движется сам, от того что тёплый поднимается вверх, коэффициент k сам зависит от разницы температур. А очень горячие тела остывают ещё и излучением, и там работает совсем другая зависимость, через четвёртые степени температур. Закон Ньютона хорош для небольших разниц, и уже в 1817 году французские физики Дюлонг и Пти предложили к нему поправку. Для пирога на кухне он годится, для раскалённой стали в кузнице уже нет.

Кухня, которая меняется. На двадцатой минуте Кузьмич зашёл на запах и не закрыл дверь. На кухне стало пятнадцать градусов, по полу потянул сквозняк, и сразу поменялись и равновесие, и k. Модель с постоянными параметрами об этом не знает, и тёще пришлось начать счёт заново с нового замера. Общее правило такое: если условия изменились, самое свежее измерение становится новым начальным условием.

Смесь экспонент. У одного изотопа один период полураспада. Но если вещество состоит из многих изотопов, быстрых и медленных, то сначала всё спадает быстро, потом всё медленнее, и одной экспонентой кривую уже не описать. Серьёзный пример даёт гражданская оборона. Радиоактивные осадки после ядерного взрыва это смесь сотен изотопов, и для них применяют не период полураспада, а правило «семь к десяти»: когда время после взрыва увеличивается в семь

раз, мощность дозы уменьшается в десять. Через 7 часов берётся исходное значение, через 49 часов в десять раз меньше, через две недели в сто. Это уже не экспонента, а степенная зависимость, и спадает она гораздо медленнее любой отдельной быстрой экспоненты. Путать их тут нельзя.

Атомов мало. Период полураспада описывает среднее поведение огромной толпы атомов. Если атомов четыре, через один период может остаться и ноль, и все четыре: каждый атом бросает свою монетку, и дальше работает биномиальное распределение из «Прикольной статистики». Детерминированная экспонента получается из случайности только на больших числах, как и всё в статистике. Об этой границе между детерминированными и стохастическими моделями говорила ещё вторая глава.

Где это работает всерьёз

Радиоуглерод. В верхних слоях атмосферы космические лучи постоянно делают из азота радиоактивный углерод-14. Он попадает в углекислый газ, из него в растения, из растений в животных. Пока дерево живо, доля углерода-14 в нём такая же, как в воздухе: что распалось, то заменилось новым. Это равновесие того же типа, что дрова в сарае у Петровича. Когда дерево срубили, приток прекратился, и дальше остаётся чистый распад с периодом около 5730 лет. Измерьте, сколько углерода-14 осталось, и формула скажет, сколько прошло времени.

Этот метод придумал американский химик Уиллард Либ-

би. В 1949 году он и его коллега Джеймс Арнольд проверили его на образцах известного возраста: древесине секвойи, годы которой можно сосчитать по кольцам, и дереве погребальной ладьи фараона Сенусерта III, время смерти которого известно из египетских записей. Расчётные даты легли рядом с известными, и в 1960 году Либби получил Нобелевскую премию по химии. Археология получила часы длиной в десятки тысяч лет. Сегодня так датируют образцы до примерно 50 тысяч лет: это около девяти периодов полураспада, и углерода-14 остаётся меньше четверти процента от начального.

История радиоуглерода вдобавок хорошо показывает, как модели чинят. Первая поправка касалась параметра. Либби считал период полураспада равным 5568 годам, позже его уточнили до 5730, то есть примерно на 3%. Вторая касалась допущения. Метод считал, что доля углерода-14 в воздухе всегда была одинаковой, а она менялась вместе с активностью Солнца и магнитным полем Земли. Исправлять пришлось не формулой, а данными. В 1967 году Ханс Зюсс опубликовал первую калибровочную кривую (calibration curve), измерив углерод в годичных кольцах старых сосен, каждое из которых датируется с точностью до года. С тех пор лаборатории сначала считают «радиоуглеродный возраст» по простой модели и со старым периодом Либби, а потом переводят его в календарные годы по калибровочной кривой. Третью поправку внесли люди: после атмосферных испытаний ядер-

ного оружия в 1950-х и 1960-х углерода-14 в воздухе стало заметно больше, и для этого периода нужна отдельная кривая. Именно поэтому радиоуглеродные даты пишут в годах «до 1950-го»: за начало отсчёта взяли год, когда воздух ещё не был испорчен испытаниями.

Лекарство в крови. В пятой главе говорилось, что при ежедневном приёме лекарства его концентрация выходит на равновесную примерно за пять периодов полувыведения. Теперь понятно почему. Период полувыведения (elimination half-life) это период полураспада, только для печени и почек. Расстояние до равновесия сокращается вдвое за каждый период, и за пять периодов от него остаётся 1/32, то есть концентрация достигает примерно 97% равновесной. Тот же расчёт работает и в обратную сторону: после отмены лекарство практически уходит из организма тоже за пять периодов. Врачи и фармакологи пользуются этим каждый день, когда решают, как часто назначать препарат. Решают это именно врачи, а не читатель книги про модели.

Задачи

Задача 1. Чай Кузьмича. Кузьмич налил себе чай в тонкую чашку: 90 градусов, на кухне 20. Чашка не пирог, остывает быстрее, условно $k = 0{,}07$ в минуту. Кузьмич пьёт чай при 60 градусах. Сколько ему ждать?

Ответ. Разница должна упасть с 70 до 40, то есть $t = \ln(70/40) / 0{,}07$, примерно 8 минут. За это время Кузьмич успевает дать тёще три совета по выпечке. Когда он доходит

до четвёртого, чай уже холодный, и тёща называет это естественным отбором советов.

Задача 2. Весло из болота. Зять нашёл на рыбалке старое деревянное весло, и знакомая лаборатория нашла в нём четверть от исходного углерода-14. Сколько лет веслу, и сколько получилось бы с периодом Либби?

Ответ. Четверть это два периода полураспада: $2 \cdot 5730 = 11\,460$ лет, а с периодом Либби 11 136. Разница в 324 года вышла из-за параметра, и ещё столько же может дать калибровка. Кузьмич осмотрел весло и заявил, что это весло его деда, которое тот утопил в сорок восьмом году. С радиоуглеродом Кузьмич расходится примерно на одиннадцать тысяч лет, но считает, что это тоже калибровка.

Задача 3. Следствие. Тёща вернулась с огорода и обнаружила, что из пирога исчез кусок. Кузьмич утверждает, что зашёл сразу, как пирог вынули из духовки, и отрезал кусок с разрешения Петровича. Щуп в пироге показывает 30 градусов, а в момент преступления, судя по срезу, начинка уже не текла. Как давно пирог стоит на столе, и мог ли Кузьмич отрезать кусок «сразу»?

Ответ. Разница с кухней упала с 70 до 10 градусов, в семь раз, и при том же k это примерно 58 минут. А начинка перестаёт течь при 40 градусах, то есть не раньше 37-й минуты. «Сразу» Кузьмича длилось не меньше тридцати семи минут. Петрович честно признался, что разрешение дал, но кусок был съеден на двоих, и дело закрыли за примирением сто-

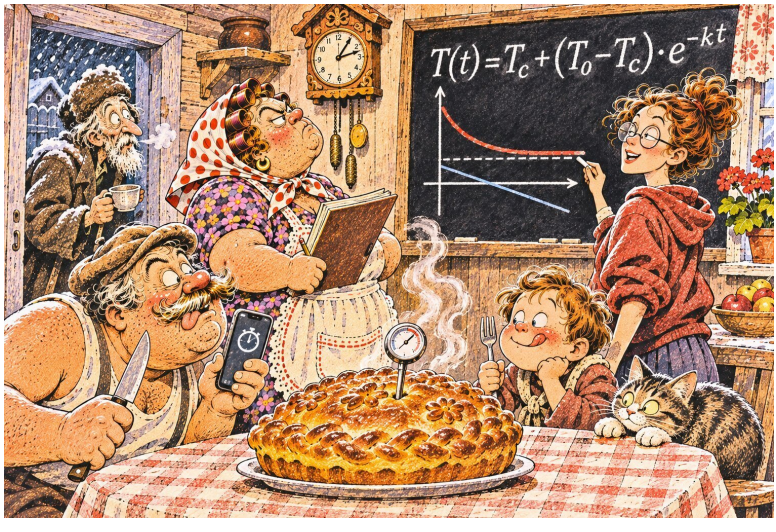
рон.

Задача 4. Дырявая бочка, обратная задача. В дырявой бочке из пятой главы было 200 литров, а теперь 50. Дождей и полива не было, период полураспада 13,5 суток. Сколько прошло времени?

Ответ. 50 от 200 это четверть, два периода, 27 суток. За эти 27 суток зять трижды обещал заклеить дыру, и обещания зятя, как и вода, тоже имеют свой период полураспада.

Задача 5. Новость остывает. В шестой главе новость про железную дверь с двумя замками за семь часов узнало всё товарищество. Пусть число людей, которые ещё обсуждают дверь, сокращается вдвое каждые двое суток. Через сколько дней из 80 человек обсуждать дверь будет меньше одного?

Ответ. Нужно log2(80), примерно 6,3 периода, то есть около 13 суток. Росла новость семь часов, а остывает две недели. Правда, модель забывает про тёщу: она не подчиняется закону распада и обсуждает дверь до сих пор. Это называется остатком модели, см. первую главу.



Глава 8. Сколько карасей вместит пруд

После истории с ряской председатель всё-таки провёл субботник. Пруд почистили, и зять, главный рыбак семьи, предложил зарыбить его карасями. Карась рыба неприхотливая, в стоячей воде живёт, а четыре карася, которых Петрович когда-то поймал в третьей главе, давно стали семейной легендой. Зять купил в рыбохозяйстве двадцать мальков и весной торжественно выпустил их с мостка.

Тут же начались подсчёты. Петрович уже знал про экспоненту и сообщил, что если карасей каждый год будет вдвое больше, то через десять лет их будет двадцать тысяч и то-

варищество сможет открыть рыбный магазин. Кузьмич потребовал сразу распределить улов по участкам. Тёща сказала коротко: пруд не резиновый. Даша согласилась с прабабушкой и добавила, что математика с ней согласна уже без малого двести лет и даже записала это формулой.

Здравый смысл тут целиком на стороне тёщи. Пока карасей двадцать, корма и места хватает всем, и они действительно множатся как ряска. Но чем их больше, тем меньше корма на одного, тем хуже они растут и тем меньше выживает мальков. В какой-то момент сколько карасей рождается, столько и пропадает, и число карасей перестаёт расти. То же самое случилось бы и с ряской из шестой главы, которой формула обещала 128% пруда, и с кроликами Фибоначчи, которые через три года должны были насчитывать сорок миллионов пар.

Получается, что у любого пруда есть своё число, сколько рыбы он способен прокормить. Оно зависит от площади, глубины, корма и того, сколько кислорода подо льдом доживает до весны. Даше пришлось признаться, что точного числа она не знает, и дальше в главе оно условное: триста карасей. Но и без точного числа можно многое сказать о том, как караси будут к нему подбираться и сколько их можно ловить.

Множитель тесноты

Возьмём разностное уравнение ряски из шестой главы: завтра столько же, сколько сегодня, плюс $r \cdot x$. И домножим прирост на новый множитель: $1 - x / K$, где K это то самое

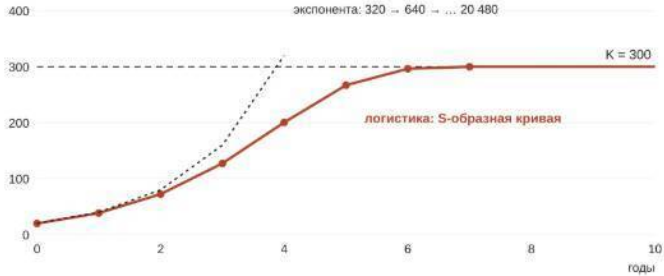
число, сколько карасей пруд способен прокормить. Его называют ёмкостью среды (carrying capacity). Пока карасей мало, x / K почти ноль, множитель почти единица, и рыба растёт как ряска. Когда карасей половина от K, множитель равен половине, и прирост вдвое меньше «рясочного». Когда карасей ровно K, множитель равен нулю, и рост останавливается. Это логистическая модель (logistic model), одна из самых известных формул в математической биологии.

Формула 1. Логистическая модель: рост с теснотой

$$x_{n+1} = x_n + r \cdot x_n \cdot (1 - x_n / K)$$

K — ёмкость среды (carrying capacity): сколько рыбы пруд может прокормить
множитель (1 − x/K): пока рыбы мало, он почти 1; у предела — почти 0

Пруд: K = 300 карасей, r = 1 в год, весной запустили 20 мальков (числа условные).
по годам: 20 → 39 → 72 → 127 → 200 → 267 → 296 → 300



Посчитаем пруд зятя. Весной запустили 20 мальков, ёмкость 300, темп r равен единице, то есть без тесноты кара-

сей за год становилось бы вдвое больше, как и думал Петрович. Через год: 20 + 20 · (1 - 20/300), примерно 39, почти удвоение. Дальше 72, потом 127, и тут становится заметно, что удвоение уже не получается. На четвёртый год 200, на пятый 267, на шестой 296, и к седьмому году карасей триста, и больше их не станет. Вместо двадцати тысяч по Петровичу триста по тёще, и рыбный магазин отменяется.

Кривая на рисунке похожа на растянутую букву S, поэтому её так и называют: S-образная кривая (sigmoid curve). У неё три части. Вначале она почти неотличима от экспоненты. В середине, когда карасей около половины от K, их прибавляется больше всего за год. Это место называется точкой перегиба (inflection point). А в конце кривая ползёт к ёмкости так же, как пирог из седьмой главы полз к температуре кухни. У модели два равновесия. Ноль неустойчив: стоит запустить пару рыб, и пруд из него уходит. Ёмкость K устойчива: лишние караси не прокормятся, недостающие дорастут. В непрерывном времени у этой модели есть явное решение, логистическая функция (logistic function): K, делённое на единицу плюс затухающая экспонента. Она ещё не раз встретится в книге, например в логистической регрессии.

Когда пруд растёт быстрее всего

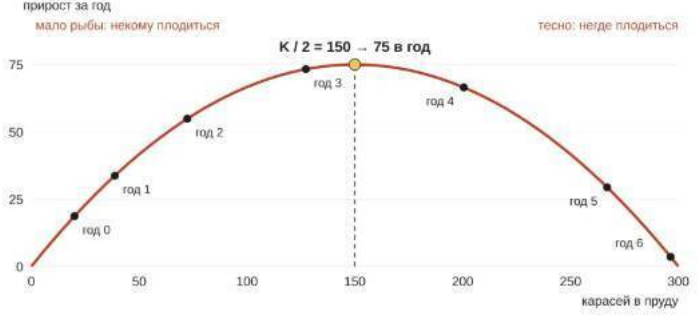
Кузьмич магазином не удовлетворился и спросил по-деловому: в какой год карасей прибавится больше всего? По таблице видно, что за первый год рыбы прибавилось 19, за второй 34, за третий 55, за четвёртый 73, а потом прирост

пошёл на убыль: 67, 29, 4. Прирост за год равен r · x · (1 - x / K) и зависит от того, сколько рыбы в пруду. При пустом пруде он равен нулю: некому множиться. При полном тоже нулю: негде. А максимум приходится ровно на середину, на K / 2, и равен r · K / 4.

Формула 2. Когда караси прибавляются быстрее всего

$$прирост = r \cdot x \cdot (1 - x / K)$$

прирост больше всего при x = K / 2: рыбы уже много, а тесноты ещё мало
это точка перегиба S-кривой; максимальный прирост r · K / 4 = 1 · 300 / 4 = 75 в год



Для пруда зятя это 1 · 300 / 4 = 75 карасей в год при полутораста рыбах в пруду. Точки на параболе показывают годы из первого рисунка: пруд сначала карабкается вверх по левому склону, между третьим и четвёртым годом переваливает через вершину и скатывается по правому к ёмкости.

Вершина параболы и есть та самая точка перегиба S-образной кривой. И здесь спрятан парадокс: быстрее всего пруд прибавляет в рыбе не тогда, когда он полон, и не тогда, когда пуст, а когда он заполнен наполовину.

Услышав это, Кузьмич мгновенно сделал вывод: значит, держим пруд наполовину пустым, а всю прибавку вылавливаем. Даша ответила, что мысль верная, и на ней десятилетиями стояло рыбное хозяйство целых стран. Но у неё есть подводные камни, о которые разбились целые промыслы, и про них нужна отдельная глава. Она следующая. А пока председатель повесил на мостке объявление: «До следующей главы карасей не ловить».

Попробуйте в таблице. Вынесите параметры в отдельные ячейки: в F1 темп r, 1, в F2 ёмкость K, 300, в F3 ежегодный улов, пока 0. В столбец A годы от 0 до 30, в B2 начальное число карасей, 20. В B3 запишите логистическую модель с уловом =МАКС(0;B2+$F$1*B2*(1-B2/$F$2)-$F$3), в английской версии =MAX(0,B2+$F$1*B2*(1-B2/$F$2)-$F$3), и протяните вниз. Постройте график: получится S-образная кривая с рисунка.

В соседний столбец C посчитайте прирост за год =B3-B2 и найдите год с самым большим приростом: это и есть точка перегиба. Постройте точечный график, где по горизонтали столбец B, а по вертикали столбец C, и точки лягут на параболу со второго рисунка. Потом поменяйте начальное число: запустите вместо 20 мальков четыреста карасей. Че-

рез год их останется 267, лишние не прокормятся, а потом запас снова поднимется к трёмстам. А вот тысячу запускать не надо: дискретная модель с большим шагом уйдёт в минус, и МАКС обнулит пруд. Это те же дрова в минусе из пятой главы. И ещё один опыт: увеличивайте r от 1 до 2,8. При r около 2 караси начнут проскакивать ёмкость и качаться вокруг неё, а при 2,8 числа превратятся в кашу. Что это за каша, рассказано в главе «Хаос в пруду». Ячейка F3 с уловом понадобится в следующей главе, пока оставьте в ней ноль.

Как метод ломается

Ёмкость, которая гуляет. В модели K параметр, а в сибирском пруду он зависит от зимы. В снежную зиму с толстым льдом в маленьком пруду кончается кислород, и случается замор: часть рыбы гибнет, и ёмкость на один год как будто сжимается. В тёплое лето с удачным кормом она, наоборот, растёт. Хорошая новость в том, что логистический пруд устойчив: после замора караси снова полезут вверх по S-кривой, как пирог после сквозняка снова полз к температуре кухни. Плохая в том, что число «триста» стоит читать как среднее за много лет, а в каждый конкретный год карасей может быть заметно больше или меньше. Если на эту триста что-то завязать, скажем ежегодный улов, случайные колебания станут опасными, и почему именно, разберёмся в следующей главе.

Запаздывание. В модели караси реагируют на тесноту мгновенно, а в жизни рыба начинает метать икру не в первое

лето, и нынешний приплод зависит от того, сколько рыбы было несколько лет назад. Системы с запаздыванием (delay) любят проскакивать равновесие и раскачиваться: когда мальков уже слишком много, это станет видно только через год-два. То же самое делает и слишком большой темп r в разностной модели, если вы пробовали поднять его до 2,8 в таблице. Плавная S-образная кривая получается только тогда, когда за один шаг ничего резкого не случается, об этом же говорилось в пятой главе про дрова в минусе.

Потолок не виден снизу. Первая половина S-образной кривой почти не отличается от экспоненты, и по ней почти невозможно угадать, где потолок. На этом обжигались самые уважаемые авторы. В 1838 году бельгийский математик Пьер Франсуа Ферхюльст применил свою модель к населению Бельгии и получил потолок в 6,6 миллиона человек. Через несколько лет он пересчитал и получил 9,4 миллиона. Сегодня в Бельгии живёт больше одиннадцати миллионов. В 1920-х американские учёные Реймонд Перл и Лоувелл Рид подогнали логистическую кривую к населению США и предсказали потолок около 200 миллионов. Этот рубеж страна перешла в 1968 году и давно ушла дальше. Дело не в том, что модель плоха, а в том, что ёмкость для людей не постоянна: страна сама её меняет новыми технологиями, как и в истории с Мальтусом из шестой главы.

Не один в пруду. В модели живут только караси. Стоит Кузьмичу запустить туда пару щук «для спорта» или соседу

выпустить окуней, как ёмкость для карасей перестанет быть числом и начнёт зависеть от того, сколько в пруду щук и окуней. Тогда вместо одного уравнения нужна система, и об этом речь пойдёт в главах про хищников и жертв и про конкуренцию.

Где это работает всерьёз

Ферхюльст против Мальтуса. Логистическая модель родилась как поправка к Мальтусу. Ферхюльст соглашался, что население стремится расти по экспоненте, но решил, что торможение должно сидеть прямо в уравнении, а не приходить снаружи в виде голода. Проще всего было сделать так, чтобы темп прироста падал по прямой по мере роста населения. Из этого простого допущения и получается множитель 1 - x / K. Работа Ферхюльста почти на век была забыта, и переоткрыта Перлом и Ридом уже в XX веке. С тех пор логистическую кривую находят повсюду: в росте колоний бактерий, в том, как распространяются стиральные машины и смартфоны, в том, как новое слово входит в язык. Везде сначала медленно, потом быстро, потом насыщение.

Инфузории Гаузе. В 1930-х годах московский биолог Георгий Гаузе решил проверить логистическую модель опытом, а не статистикой населения. Он выращивал в пробирках инфузорий-туфелек, кормил их бактериями и дрожжами и каждый день считал под микроскопом. Поодиночке каждый из трёх видов рос по логистической кривой и выходил на свою ёмкость, прямо как в формуле. А дальше было инте-

реснее. Два вида, которые ели одни и те же бактерии, в одной пробирке ужиться не смогли: один вытеснил другого до полного исчезновения. А два вида, один из которых ел в основном дрожжи, прекрасно жили вместе. Так появился принцип конкурентного исключения (competitive exclusion principle), его часто называют принципом Гаузе: два вида с одной и той же едой и одним и тем же образом жизни долго вместе не живут. Книгу «Борьба за существование» Гаузе выпустил в 1934 году в США, и она стала классикой экологии. Про то, как составить уравнения для двух видов сразу, поговорим в главах про хищников и жертв.

Рыбная промышленность. В 1954 году американский учёный Милнер Шейфер применил логистическую модель к промысловой рыбе и построил на ней ту самую идею, что пришла в голову Кузьмичу: держать запас рыбы возле половины ёмкости и снимать прибавку. На десятилетия это стало основой рыбного хозяйства во многих странах, и чем это кончилось для североатлантической трески, стоит отдельного рассказа. Его вы найдёте в следующей главе.

Задачи

Задача 1. Пруд вдвое больше. В третьей главе председатель задумал выкопать пруд вдвое больше. Пусть ёмкость тоже удвоится, до 600 карасей, а r останется равным единице. Каким станет максимальный прирост и когда пруд из двадцати мальков доберётся до точки перегиба?

Ответ. Максимальный прирост $1 \cdot 600 / 4 = 150$ карасей

в год, тоже вдвое больше, а точка перегиба теперь при 300 карасях. Пруд перевалит через неё между четвёртым и пятым годом, всего на год позже маленького: так удвоение пруда стоит одного удвоения рыбы. Рыть правда придётся вдвое больше, и субботник по этому поводу председатель уже объявил.

Задача 2. Ряска с берегами. В шестой главе ряска росла на 41% в сутки и через 13 с небольшим суток должна была закрыть весь пруд. Пересчитайте по логистической модели с ёмкостью 100% пруда: когда ряска займёт половину и когда 90%?

Ответ. Половину пруда она займёт на 13-е сутки, 90% только на 18-е. Теснота подарила председателю лишние пять дней, но и этих пяти дней он не заметил, потому что всё это время спорил с Кузьмичом о том, нужен ли субботник.

Задача 3. Клетка. Кузьмич всё-таки докупил Сёмке второго кролика, но поставил клетку, в которой помещается не больше десяти кроликов. Пусть без тесноты их становилось бы в 1,6 раза больше за месяц, то есть $r = 0{,}6$. Когда в клетке станет девять кроликов?

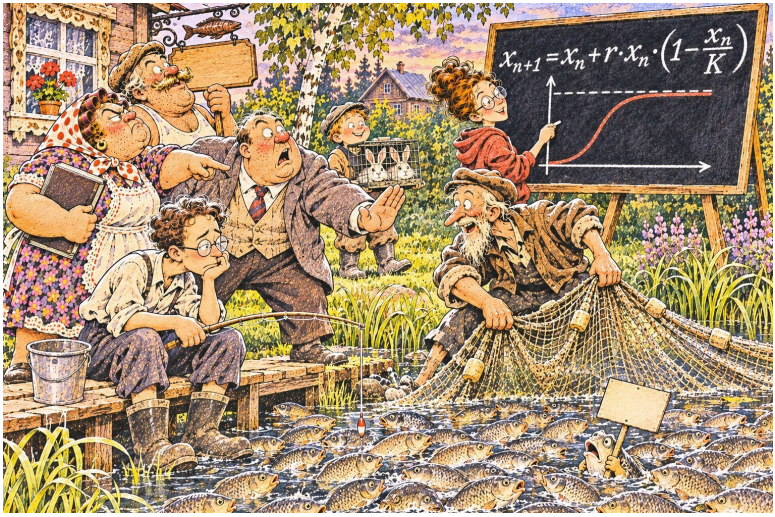
Ответ. 2; 3,0; 4,2; 5,7; 7,1; 8,4; 9,2: на шестой месяц. Дальше десятый кролик приближается всё медленнее, и дробные кролики в ответе напоминают, что непрерывная модель для маленьких чисел только приближение, как и атомы из седьмой главы. Сёмка с моделью не согласен: у него все кролики целые и у всех есть имена.

Задача 4. Прогноз Петровича. За три года зять насчитал в пруду 20, 39 и 72 карася. Петрович заметил, что каждый год рыбы становится примерно в 1,9 раза больше, и по этому множителю предсказал число карасей на седьмой год. Что у него получилось и что будет на самом деле?

Ответ. 20 · 1,9^7, примерно 1800 карасей. На самом деле их будет триста, в шесть раз меньше. По первым трём точкам S-кривую не отличить от экспоненты, и Петрович тут в хорошей компании: так же ошибались и Ферхюльст, и Перл с Ридом, только в другую сторону. Петрович предложил считать свой прогноз не ошибкой, а планом на пруд вшестеро больше.

Задача 5. Подарок председателя. К шестому году в пруду 296 карасей, и председатель к празднику привёз и выпустил ещё двадцать. Сколько рыбы будет через год?

Ответ. В пруду стало 316, больше ёмкости, множитель 1 - 316 / 300 отрицательный, и через год карасей снова около трёхсот. Устойчивое равновесие подарков не принимает. Председатель обиделся на математику, а тёща записала в тетрадь, что двадцать карасей лучше было сразу зажарить: итог для пруда тот же, а для товарищества ужин.


$x_{n+1} = x_n + r \cdot x_n \cdot \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$

Глава 9. Сколько карасей можно ловить

Объявление на мостке «До следующей главы карасей не ловить» провисело семь лет. За это время пруд добрал свои триста карасей, зять каждую осень считал их по всем правилам ихтиологии, а Кузьмич дважды подавал председателю заявление, что следующая глава уже наступила. Наконец собралось общее собрание с единственным вопросом на повестке: сколько карасей можно ловить, чтобы их хватило и внукам.

Предложений было три. Кузьмич с прошлой главы помнил про вершину параболы и предложил строго научный план: выловить половину, а потом каждый год брать по 75, всю прибавку до рыбки. Председатель предложил квоту покруглее, 80 карасей в год, по одному на участок, чтобы никому не было обидно. А тёща предложила ловить не штуки, а долю: каждый год пятую часть того, что плавает в пруду, и ни карасём больше. Зал раскололся. Все повернулись к Даше, как в четвёртой главе.

Здравый смысл тут всем подсказывает одно и то же: лови не больше, чем прибавилось, и рыба не кончится. Это верно, и это тот же принцип, что и с капиталом: трать проценты, а не вклад. Но у пруда есть особенность, которой нет у бан-

ка. В банке с большего вклада всегда больше процентов. А в пруду, как мы видели в прошлой главе, прибавка сначала растёт вместе с числом рыб, а потом падает из-за тесноты. Значит, одна и та же прибавка может быть с богатого пруда и с бедного, и вопрос «сколько ловить» нельзя решить одним числом, не спросив, сколько рыбы в пруду сейчас.

Есть и вторая сложность, чисто человеческая. Карасей никто не пересчитывает поштучно, о них судят по улову и по оценке зятя. А решение принимает не один рыбак, а общее собрание, и каждому его участнику лично выгодно поймать на одного карася больше. Оба обстоятельства ниже окажутся важнее самой формулы.

Квота в штуках

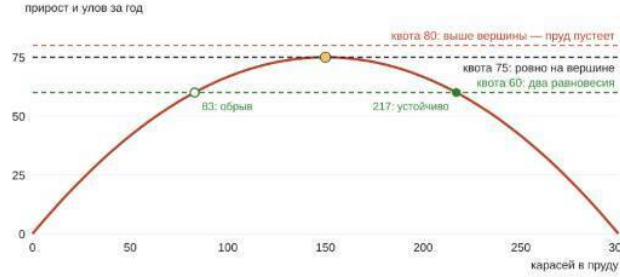
Добавим в логистическую модель из прошлой главы ещё один отток: каждый год вылавливается H карасей. Это постоянная квота (fixed quota), или, как говорят специалисты, общий допустимый улов (total allowable catch). Рыба в пруду стоит на месте, когда прирост равен квоте, то есть там, где парабола прироста из прошлой главы пересекается с горизонтальной линией квоты.

Формула 1. Постоянная квота и максимальный устойчивый улов

$$x_{n+1} = x_n + r \cdot x_n \cdot (1 - x_n / K) - H$$

H — квота: сколько рыбы вылавливают за год, сколько бы её ни было

равновесие там, где прирост равен квоте; максимум H = r · K / 4 = 75 (maximum sustainable yield)



Ниже точки 83 прирост меньше квоты, и каждый год рыбы становится ещё меньше.

На рисунке видны все три предложения собрания и ещё

одно, Дашино. Квота председателя, 80, проходит выше вершины параболы и нигде с ней не встречается: сколько бы рыбы ни было, вылавливают больше, чем она успевает прибавить. Пруд с тремястами карасями держится так несколько лет, уловы исправные, все довольны, а на двадцатый год ловить становится нечего. Квота Кузьмича, 75, касается параболы ровно в вершине. Это и есть максимальный устойчивый улов (maximum sustainable yield), самая большая квота, которую пруд в принципе способен выдерживать год за годом: $r \cdot K / 4$, то есть $1 \cdot 300 / 4 = 75$.

Но у этой вершины скверный характер. Даша предложила квоту 60, и на ней лучше всего видно, как устроена система. Линия квоты пересекает параболу дважды, при 217 и при 83 карасях. Правая точка устойчива: если рыбы стало больше, теснота снижает прирост, и квота её подрезает; если меньше, прирост обгоняет квоту, и запас подтягивается. А левая точка это край обрыва. Если по какой-то причине карасей стало меньше 83, прирост становится меньше квоты, рыбы становится ещё меньше, прирост ещё меньше, и спуск идёт до нуля. Такой самоусиливающийся спуск называется положительной обратной связью (positive feedback), и слово «положительная» тут звучит особенно иронично. Чем ближе квота к вершине, тем ближе обрыв к рабочей точке, а при квоте 75 они сливаются в одну. План Кузьмича ставит пруд на самую кромку обрыва: достаточно одной плохой зимы.

Квота в долях

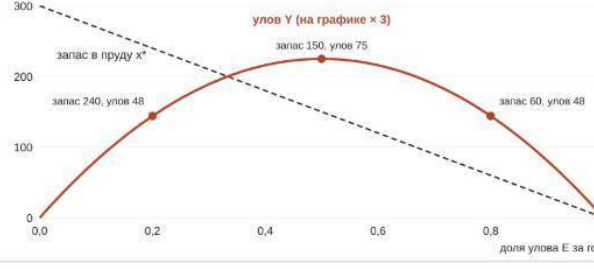
Теперь предложение тёщи: ловить каждый год не число рыб, а долю E от того, что есть. Специалисты называют такую долю интенсивностью промысла (fishing effort), потому что на деле её задают не числом рыб, а числом сетей, судов и дней лова: с тем же неводом в полном пруду ловится больше, в пустом меньше. Улов тогда равен $E \cdot x$, и он сам следит за запасом. Так же вёл себя Кузьмич с дровами в пятой главе, и сарай при нём никогда не пустел.

Равновесие находится из того же условия «прирост равен улову»: $r \cdot x \cdot (1 - x / K) = E \cdot x$. Сократив на x, получаем запас $x^* = K \cdot (1 - E / r)$ и улов $Y = E \cdot K \cdot (1 - E / r)$. При тёщиной доле 0,2 в пруду установится 240 карасей, а улов будет 48 в год. При доле 0,5 запас 150, улов 75: тот же максимум, что и у Кузьмича.

Формула 2. Ловить долю, а не штуки

$$улов = E \cdot x,\ x^* = K \cdot (1 - E / r),\ Y = E \cdot K \cdot (1 - E / r)$$

E — интенсивность промысла (fishing effort): какую долю рыбы вылавливают за год
x* — где установится запас, Y — сколько будут ловить каждый год



Один и тот же улов 48 можно брать с полного пруда или с почти пустого. Слева надёжно, справа опасно.

Разница между двумя правилами видна не в спокойный год, а в плохой. Если зимний замор унёс часть карасей, при доле и улов станет меньше, сам собой, без всяких собраний, и пруд вернётся к своему равновесию. У такого правила нет обрыва: равновесие одно, и оно устойчиво. Списать пруд в ноль можно только одним способом: ловить долю, равную r или больше, то есть быстрее, чем караси размножаются даже без тесноты.

У рисунка есть ещё один урок, важный для здравого смысла. Один и тот же улов 48 карасей получается и при доле 0,2 с пруда, где плавает 240 рыб, и при доле 0,8 с пруда, где осталось 60. По улову эти два пруда не различить, а по надёжно-

сти они как небо и земля. Второй случай называется переловом (overfishing): ловят столько же, но тратят на это вчетверо больше сил и держат пруд на голодном пайке. Собрание посовещалось и утвердило тёщино правило: пятая часть пруда в год. Улов меньше максимума, зато на рыбалке есть что ловить.

Попробуйте в таблице. Возьмите таблицу из прошлой главы, где в F1 стоит r, в F2 ёмкость K, а в F3 ждёт своего часа улов. Добавьте в F4 долю улова E, пока 0. Формула в B3 теперь учитывает оба вида лова: =МАКС(0;B2+$F$1*B2*(1-B2/$F$2)-$F$3-$F$4*B2), в английской версии =MAX(0,B2+$F$1*B2*(1-B2/$F$2)-$F$3-$F$4*B2). В B2 поставьте 300 и протяните на сорок лет.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, купив полную легальную версию на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.