

Василиса Волконская

Теория вероятностей. Часть 1

Василиса Волконская

Теория вероятностей. Часть 1

«Автор»

2026

Волконская В.

Теория вероятностей. Часть 1 / В. Волконская — «Автор», 2026

В серии этих книг собрано много методик по решению и школьной математики и высшей математики. В книгах подробно разобраны различные примеры, для сдачи экзаменов и в школе и в университете. Собраны многие правила и методики решения задач. Материал написан доступно для любого среднего ученика, который хочет понять математику, а не бездумно ее списать.

Василиса Волконская

Теория вероятностей. Часть 1

Содержание:

- 1) Размещения; сочетания и перестановки.
 - 2) Случайные события.
 - 3) Сложение, произведение и разность событий.
 - 4) Другие правила теории вероятностей.
 4. 1 Зависимые и независимые события.
 4. 2 Классическое определение вероятности.
 4. 3 Вероятность суммы несовместных событий.
 4. 4 Условная вероятность.
 4. 5 Умножение зависимых вероятностей.
 4. 6 Умножение независимых совместных событий.
 4. 7 Вероятность суммы совместных событий.
 - 5) Аксиомы вероятности.
 - 6) Основные свойства вероятностей.
 - 7) Формула полной вероятности.
 - 8) Формула Байеса.
 - 9) Примеры решения задач.
 9. 1 Пример на формулу полной вероятности и формулу Байеса.
 9. 2 Примеры на сложение и умножение событий.
 - 10) Словесные обозначения знаков, которые могут попасться в задачах.
 - 11) Задачи с монетой.
 - 12) Задачи с не равновероятными событиями.
 - 13) Задачи на зависимые события.
 - 14) Задачи на вынимание шаров.
 - 15) Решение различных задач.
- Теория вероятностей.
- 1)) Размещения; сочетания и перестановки.
 1. Размещения.
- Если комбинации из n элементов по m элементам отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения, либо тем и другим, то такие комбинации называются размещениями из n элементов по m элементам.

$$A_n^m = n! / (n - m)!$$

2. Сочетания.

Если комбинации из n элементов по m элементам отличаются только составом элементов, то их называют сочетаниями из n элементов по m элементам.

$$C_n^m = n! / m! (n - m)!$$

3. Перестановки.

Если комбинации из n элементов отличаются только порядком расположения этих элементов, то их называют перестановками из n элементов.

$$P_n = n!$$

Размещения и сочетания с повторениями.

4. Размещения с повторениями.

Если в размещениях из n элементов по m элементам некоторые из элементов повторяются или оказались одинаковыми, то такие размещения называются размещениями с повторениями из n элементов по m элементам.

$$\tilde{A}_n^m = n^m$$

5. Сочетания с повторениями.

Если в сочетаниях из n элементов по m элементам некоторые из элементов или все, могут оказаться одинаковыми, то такие сочетания называются сочетаниями с повторениями из n элементов по m элементам.

$$\tilde{C}_n^m = C_{(n + m - 1)}^m$$

$$\tilde{C}_n^m = (n + m - 1)! / m!(n - 1)!$$

6. Перестановки с повторениями.

Если в перестановках из общего числа из n элементов, есть k различных элементов, при этом первый элемент повторяется n_1 раз, второй элемент повторяется n_2 раза и k - тый элемент повторяется k раз, то такие перестановки называются перестановками с повторениями из n элементов.

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = n! / n_1! n_2! \dots n_k!$$

2)) Случайные события.

Событие - это результат какого-либо опыта или испытания.

Опытом или испытанием называется всякое осуществление комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующее явление.

Случайным событием называется событие, которое в данном опыте может произойти, а может и не произойти.

Достоверным событием называется событие, которое обязательно произойдет в опыте или испытании.

Обозначается оно Ω

Невозможным событием называют событие, которое в опыте или испытании произойти не может.

Обозначается оно $\emptyset$

Совместными событиями называются события, если появление одного события в данном опыте не исключает появления другого события в этом опыте (испытании).

Несовместными событиями называются события, если они не могут произойти вместе, при одном и том же испытании.

Противоположными событиями называют события, если при появлении одного из них равносильно не появлению другого события.

Равновозможными событиями называются события, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другое.

3)) Сложение, произведение и разность событий.

Суммой или объединением событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них.

$$\sum_{i=1}^n A_i = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Произведением или пересечением событий называется событие состоящее в одновременном появлении всех событий.

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

Разностью двух событий называется событие, которое означает, что если наступило одно событие, то другое наступить не может.

A - одно событие.

B - другое событие.

$C = A / B = A - B$

Разность событий A и B событие C.

$$\sum_{i=1}^n - \text{сумма от 1 до } n.$$

$$\prod_{i=1}^n - \text{произведение от 1 до } n.$$

4)) Другие правила теории вероятностей.

4. 1 Зависимые и независимые события.

Два события называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятности наступления другого.

Два события называются зависимыми, если появление одного из них меняет вероятность наступления другого.

4. 2 Классическое определение вероятности.

Вероятностью события называется отношение числа благоприятных исходов на число всех исходов.

$$P(A) = m / n$$

A - событие.

P(A) - вероятность события.

m - число благоприятных исходов.

n - число всех исходов.

4. 3 Вероятность суммы несовместных событий.

Теорема о сложении вероятностей от несовместных событий.

Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ - несовместные события.

$P(A_1), P(A_2), P(A_n)$ - вероятности несовместных событий.

Следствие 1 из теоремы о сложении вероятностей.

Сумма вероятностей событий образующих полную группу равна единице.

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ - единственно возможные и несовместные события.

Следствие 2 из теоремы о сложении вероятностей.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

A - событие, несовместное.

$\bar{A}$ - противоположное событие, несовместное.

$P(A)$ - вероятность события, несовместного.

$P(\bar{A})$ - вероятность противоположного события, несовместного.

4. 4 Условная вероятность.

Вероятность события B найденная при условии, что событие A произошло, называется условной вероятностью события B .

Обозначается условная вероятность $P(A/B)$ или $P_A(B)$

4. 5 Умножение зависимых вероятностей.

Два события называются зависимыми, если появление одного из них меняет вероятность наступления другого.

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие произошло.

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B/A)$$

Вероятность произведения нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условные вероятности других событий.

$$P(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_2/A_1) \times P(A_n/A_{n-1}/\dots/A_1)$$

При условии, что вероятность каждого следующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли.

4. 6 Умножение независимых совместных событий.

Два события называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятность наступления другого события.

Вероятность произведения двух или нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

4. 7 Вероятность суммы совместных событий.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, без вероятности их произведения.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \times B)$$

Вероятность суммы нескольких совместных событий, равна разности между единицей и вероятностью произведения противоположных событий.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ - совместные события.

$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ - противоположные совместные события.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \times \bar{A}_2 \times \dots \times \bar{A}_n)$$

5)) Сформулируем аксиомы вероятности.

Аксиома - это утверждение, которое принимается без доказательства.

1. Вероятность любого события не отрицательна.

$$P(A) \geq 0$$

2. Вероятность достоверного события равна единице.

$$P(\Omega) = 1$$

Ω - достоверное событие.

3. Вероятность суммы совместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

4. Произведение событий - это пересечение.

У несовместных событий их при пересечении получается пустое множество.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \emptyset$$

6)) Основные свойства вероятностей.

1. Противоположное событие равно разности единицы и исходного события.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

2. Вероятность от невозможного события равна нулю.

$$P(\emptyset) = 0$$

$\emptyset$ - невозможное событие.

3. Вероятность события не меньше нуля и не больше единицы.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

4. Если событие A влечёт за собой событие B, то вероятность события A не больше вероятности события B.

$$P(A) \leq P(B)$$

Если $A \subset B$

$\subset$ влечёт за собой.

5. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \times B)$$

A, B - совместные события.

6. Сумма вероятностей несовместных событий не больше суммы вероятностей этих событий.

$$P(A + B) \leq P(A) + P(B)$$

A, B - не совместные события.

7. Условная вероятность события B относительно события A, есть отношение вероятности произведения этих событий к вероятности события A.

$$P(B/A) = P(A \times B) / P(A)$$

Если $P(A) \neq 0$

7)) Формула полной вероятности. Если события несовместны и зависимы.

Рассмотрим формулу для двух событий, несовместных и зависимых и образующих полную группу.

То есть эти события противоположны.

А противоположно В.

Теорема.

Если событие Н может произойти только при условии появления одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, образующих полную группу, то вероятность события Н равна сумме произведения вероятностей каждого из этих событий на соответствующие условные вероятности события Н.

$$P(H) = \sum P(A_i) \times P(H/A_i)$$

A_i - это обозначение какой-либо вероятности.

8)) Формула Байеса.

Запишем её для двух вероятностей $P(A)$ и $P(B)$, которые составляют полную группу.

То есть они противоположны.

А противоположно В.

$$P(H/A) = P(A) \times P(H/A) / P(H)$$

$$P(H/B) = P(B) \times P(H/B) / P(H)$$

$$P(H) = P(A) \times P(H/A) + P(B) \times P(H/B)$$

Или можно записать эту формулу для более чем двух событий.

$$P(H/A_i) = P(A_i) \times P(H/A_i) / \sum P(A_i) \times P(H/A_i)$$

A_i - это все зависимые вероятности составляющие полную группу.

9)) Примеры решения задач.

9. 1 Пример на формулу полной вероятности и формулу Байеса.

Пример 1.

В торговую фирму поступили телевизоры от трёх поставщиков.

Вероятность того, что телевизор поступил от каждого поставщика $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,5$ соответственно.

Практика показала, что не потребуется ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 98%; 88%; 92% случаях.

Дано:

$$p_1 = 0,1$$

$$p_2 = 0,4$$

$$p_3 = 0,5$$

$$q_1 = 98\% = 0,98$$

$$q_2 = 88\% = 0,88$$

$$q_3 = 92\% = 0,92$$

Найти:

1. Вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор не потребует ремонта.

2. Проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока.

Решение:

Посмотрим, образуют ли полную группу телевизоры, поступившие в продажу от трёх фирм.

Сложим вероятности поступления телевизоров от трёх фирм.

$$0,1 + 0,4 + 0,5 = 1$$

$$1 = 1$$

Сумма вероятностей равна единице. Значит, они образуют полную группу.

Можно применить формулу полной вероятности.

$$P(H) = P(A) \times P(H/A) + P(B) \times P(H/B) + P(C) \times P(H/C)$$

A, B, C - это события, при которых поступили телевизоры из трёх разных фирм.

A - телевизор поступил из первой фирмы.

B - телевизор поступил из второй фирмы.

C - телевизор поступил из третьей фирмы.

P(A) - вероятность поступления телевизора из первой фирмы.

P(B) - вероятность поступления телевизора из второй фирмы.

P(C) - вероятность поступления телевизора из третьей фирмы.

H - событие, при котором телевизор не потребует ремонта.

P(H) - вероятность, что телевизор не будет ремонтироваться.

$P(H/A) = q_1$ - вероятность того, что телевизор не потребует ремонта из первой фирмы.

$P(H/B) = q_2$ - вероятность того, что телевизор не потребует ремонта из второй фирмы.

$P(H/C) = q_3$ - вероятность того, что телевизор не потребует ремонта из третьей фирмы.

$$P(H) = 0,1 \times 0,98 + 0,4 \times 0,88 + 0,5 \times 0,92 = 0,91.$$

С вероятностью $P(H) = 0,9$ телевизор не потребует ремонта из любой фирмы.

2.

$q_1 = 0,98$ - это вероятность того, что телевизор из первой фирмы не потребует ремонта.

Для того чтобы найти обратную вероятность, нужно из единицы вычесть исходную вероятность.

$$P(H/A) = 1 - q_1 = 1 - 0,98 = 0,02 = \bar{q}_1$$

$$P(H/B) = 1 - q_2 = 1 - 0,88 = 0,12 = \bar{q}_2$$

$$P(H/C) = 1 - q_3 = 1 - 0,92 = 0,08 = \bar{q}_3$$

$\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$ вероятности того, что телевизор потребует ремонта из первой, второй и третьей фирмы соответственно.

$P(H) = 0,91$ - это вероятность, что из всех трёх фирм телевизоры не потребуют ремонта.

Если найти обратную вероятность, то это будет вероятность того, что телевизор из любой фирмы потребует ремонта.

$$P(\bar{H}) = 1 - 0,91 = 0,09$$

Найдём вероятность, что телевизор потребовал ремонта из определённой фирмы.

$$P(\bar{H}/A) = P(A) \times P(\bar{H}/A) / P(\bar{H}) = 0,1 \times 0,02 / 0,09 = 0,022$$

$$P(\bar{H}/B) = P(B) \times P(\bar{H}/B) / P(\bar{H}) = 0,4 \times 0,12 / 0,09 = 0,533$$

$$P(\bar{H}/C) = P(C) \times P(\bar{H}/C) / P(\bar{H}) = 0,5 \times 0,08 / 0,09 = 0,444$$

Ответ:

1) 0,91

2) 0,022

0,533

0,444

Пример 2.

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9; если стреляет из пристрелянного ружья.

Если Джон стреляет из не пристрелянного ружья, то попадает в муху с вероятностью 0,3.

На столе лежит 10 ружей. Из них два пристрелянные.

Ковбой видит на стене муху и наудачу хватается первое попавшееся ружьё и стреляет в муху.

Найти эти вероятность того, что он промахнётся.

Какова вероятность, что он попадёт.

Дано:

$$q_1 = 0,9$$

$$q_2 = 0,3$$

$$p_1 = 2 / 10 = 0,2$$

$$p_2 = 8 / 10 = 0,8$$

Найти: $P(H)$ - ?

Решение:

Посмотрим, образуют ли полную группу вероятности схватить пристрелянное или не пристрелянное ружьё.

Они несовместны.

$$0,2 + 0,8 = 1$$

Так как сумма вероятностей равна единице, то они составляют полную группу.

И так как их две, то они противоположные.

$P(A) = p_1 = 0,2$ - вероятность схватить пристрелянное ружьё.

$P(B) = p_2 = 0,8$ - вероятность схватить не пристрелянное ружьё.

A - схватил пристрелянное ружьё (событие).

B - схватил не пристрелянное ружьё (событие)

H/A - попал из пристрелянного ружья (событие).

H/B - попал из не пристрелянного ружья (событие).

$P(H/A) = 0,9$ - вероятность попадания из пристрелянного ружья (условная вероятность).

$P(H/B) = 0,3$ - вероятность попадания из не пристрелянного ружья (условная вероятность).

Формула полной вероятности.

$$P(H) = P(A) \times P(H/A) + P(B) \times P(H/B)$$

Найдём вероятность, что он попадёт.

$$P(H) = 0,2 \times 0,9 + 0,8 \times 0,3 = 0,18 + 0,24 = 0,42$$

Так как вероятности, что он попадёт или промахнётся противоположные, то сумма их равна единице.

$$P(H) + P(\bar{H}) = 1$$

$$P(\bar{H}) = 1 - P(H)$$

$$P(\bar{H}) = 1 - 0,42 = 0,58$$

Можно было найти и по-другому.

Найти противоположные вероятности для вероятностей попадания из ружей.

$P(\bar{H}/A) = 1 - P(H/A) = 1 - 0,9 = 0,1$ - вероятность того, что он не попал из пристрелянного ружья.

$P(\bar{H}/B) = 1 - P(H/B) = 1 - 0,3 = 0,7$ - вероятность того, что он не попал из не пристрелянного ружья.

$$P(\bar{H}) = P(A) \times P(\bar{H}/A) + P(B) \times P(\bar{H}/B)$$

$$P(\bar{H}) = 0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,7 = 0,58$$

Ответ: 0,58

9. 2 Примеры на сложение и умножение событий.

Пример 1.

В торговом центре два одинаковых автомата подают чай.

Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится чай равна 0,4

Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах равна 0,2.

Найдите вероятность, что к концу дня чай останется в автоматах.

Дано:

$$P(A) = 0,4$$

$$P(B) = 0,4$$

$$P(A \times B) = 0,2$$

Найти: $\bar{P}$ - ?

Решение:

Так как автоматы подают чай вместе, следовательно события А и В совместные.

Если события совместные, то вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения.

А - событие, что чай закончится в первом автомате.

В - событие, что чай закончится во втором автомате.

$A \times B$ - событие, что чай закончится в обоих автоматах (пересечение событий).

$A + B$ - событие, что чай закончится хотя бы в одном автомате (объединение событий).

$P(A)$ - вероятность закончится чаю в одном автомате.

$P(A) = 0,4$

$P(B)$ - вероятность закончится чаю во втором автомате.

$P(B) = 0,4$

$P(A \times B)$ - вероятность закончится чаю в обоих автоматах

$P(A \times B)$ - это вероятность пересечения множеств (событий).

$P(A \times B) = 0,2$

$P(A + B)$ - вероятность закончится чаю хотя бы в одном автомате.

$P(A + B)$ - это вероятность объединения множеств (событий).

$P(A + B) = 0,4 + 0,4 - 0,2 = 0,8 - 0,2 = 0,6$

Вероятность того, что чай останется в обоих автоматах противоположна для $P(A + B)$.

$$P(\overline{A + B}) = 1 - P(A + B)$$

$$P(\overline{A + B}) = 1 - 0,6 = 0,4$$

Ответ: 0,4

Пример 2.

По отзывам И. И. оцените надёжность двух интернет магазинов.

Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А равна 0,94.

Вероятность того, что доставят нужный товар из магазина Б равна 0,8.

И. И. заказал товар сразу в обоих магазинах, считая, что интернет магазины независимы друг от друга.

Найти вероятность:

1. Что ни один магазин не доставит товар.
2. Оба магазина доставят товар.
3. Первый магазин доставит товар, а второй нет.
4. Второй магазин доставит товар, а первый нет.
5. Товар доставят хотя бы из одного магазина.
6. Товар не доставили хотя бы из одного магазина.

Дано:

$P(A) = 0,94$

$P(B) = 0,8$

Найти все пункты.

Решение:

1)

A - событие, что доставили товар из первого магазина.

B - событие, что доставили товар из второго магазина.

$P(A) = 0,94$ - вероятность доставить товар из первого магазина.

$P(B) = 0,8$ - вероятность доставить товар из второго магазина.

$P(A \times B)$ - товар доставили из обоих магазинов.

Так как нам нужно найти, что товар не доставили из обоих магазинов, то сначала найдём, что его доставили из обоих магазинов.

Если товар доставили из обоих магазинов, то множество элементов (событий) пересекаются.

Следовательно, их нужно перемножить.

Так как события независимые (появление одного из них не мешает вероятности наступления другого), то вероятность произведения этих событий равна произведению вероятностей этих событий.

Это мы нашли, что товар доставили из обоих магазинов.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.