

A photograph of a young evergreen tree, possibly a spruce or fir, with dense green needles. The tree is the central focus, surrounded by various garden plants, including tall grasses, white daisy-like flowers, and other green shrubs. The background is a soft-focus garden scene with more trees and foliage.

Василиса Волконская

Интегрирование тригонометрических функций

Василиса Волконская

Интегрирование

тригонометрических функций

<https://litres.ru/74451408>

SelfPub; 2026

Аннотация

В серии этих книг собрано много методик по решению и школьной математики, и высшей математики. В книгах подробно разобраны различные примеры, для сдачи экзаменов и в школе, и в университете. Собраны многие правила и методики решения задач. Материал написан доступно для любого среднего ученика, который хочет понять математику, а не бездумно ее списать.

Василиса Волконская

Интегрирование тригонометрических функций

Содержание:

- 1) Таблицы производных и первообразных.
- 2) Примеры интегралов с тригонометрическими функциями.
- 3) Основные тождества для обратных тригонометрических функций.
- 4) Универсальная тригонометрическая замена.
 4. 2 Замена на тангенс от обычного аргумента (просто тангенс).
 - 4.1 Замена на тангенс половинного аргумента.
- 5) Интегрирование иррациональных функций.
 5. 1 Первый тип иррациональных функций. Под корнем переменная находится в первой степени и корень квадратный.
 5. 2 Второй тип иррациональных функций.

Под квадратным корнем находится дробь в числителе и знаменателе, которой переменная стоит в первой степени.
 5. 3 Третий тип иррациональных функций.

Под интегралом содержатся различные корни от одной переменной.

5. 4 Четвёртый тип иррациональных функций.

Под интегралом содержится корень от квадратного трёхчлена.

1) Таблицы производных и первообразных.

Производные функций (звездочка это x).

$$1) c' = 0$$

c - любое число.

Степенная функция.

$$2) (x^n)' = n x^{n-1}$$

Частные случаи степенной функции.

$$1. x' = 1$$

$$2. c x' = c$$

c и $c1$ - любые числа.

$$3. (x^2)' = 2x$$

$$4. (x^3)' = 3x^2$$

$$5. (1/\sqrt{x})' = -1/2 \times 1/\sqrt{x}^3$$

$$6. (\sqrt[3]{x})' = 1/(3\sqrt[3]{x}^2)$$

$$7. (\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$$

$$8. (1/x)' = -1/x^2$$

$$9. (1/\sqrt[3]{x})' = -1/(3\sqrt[3]{x}^4)$$

Другие различные функции.

$$3) (\ln x)' = 1/x$$

$$4) (e^*)' = e^*$$

$$5) (\cos x)' = -\sin x$$

$$6) (\sin x)' = \cos x$$

$$7) (\operatorname{tg} x)' = 1 / \cos^2 x$$

$$8) (\operatorname{ctg} x)' = -1 / \sin^2 x$$

$$9) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$a > 0$$

$$a \neq 1$$

$$x > 0$$

$$10) (\operatorname{arctg} x)' = 1 / (1 + x^2)$$

$$11) (\operatorname{arctg} x / a)' = a / (a^2 + x^2)$$

$$12) (\operatorname{arcctg} x)' = -1 / (1 + x^2)$$

$$13) (\operatorname{arcctg} x / a)' = -a / (a^2 + x^2)$$

$$14) (\arcsin x)' = 1 / \sqrt{1 - x^2}$$

$$15) (\arcsin x / a)' = 1 / \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$16) (\arccos x)' = -1 / \sqrt{1 - x^2}$$

$$17) (\arccos x / a)' = -1 / \sqrt{a^2 - x^2}$$

Интегралы функций.

$$1) \int c \, dx = Cx + C_1$$

$$2) \int 1 \, dx = x + C$$

$$3) \int x^n = x^{n+1} / (n+1) + C; n \neq -1$$

$$4) \int \sqrt{x} = (2/3) \sqrt{x}^3$$

$$5) \int (1/x) \, dx = \int dx / x = \ln |x| + C$$

$$6) \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$7) \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$8) \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$9) \int dx / \cos^2 x = \operatorname{tg} x + C$$

$$10) \int dx / \sin^2 x = -\operatorname{ctg} x$$

$$11) \int a^x dx = (a^x / \ln a) + C$$

$$12) \int dx / (1 + x^2) = \operatorname{arctg} x + C$$

$$13) \int dx / \sqrt{1 - x^2} = \arcsin x + C$$

$$14) \int dx / (x \ln \beta) = \log_{\beta} x + C$$

$$15) \int dx / \sqrt{x} = 2 \sqrt{x} + C$$

$$16) \int dx / \sqrt{(x^2 \pm a^2)} = \ln|x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)}| + C$$

$$17) \int dx / (x^2 - a^2) = (1/2a) \ln |(x - a)/(x + a)| + C$$

$$18) \int dx / (a^2 - x^2) = (1/2a) \ln |(x + a)/(x - a)| + C$$

$$19) \int dx / x^2 = -1/x + C$$

$$20) \int dx / (a^2 + x^2) = (1/a) \operatorname{arctg} (x/a) + C = - (1/a) \operatorname{arcctg} (x/a) + C$$

$$21) \int dx / \sqrt{(a^2 - x^2)} = \arcsin (x/a) + C = -\arccos (x/a) + C$$

$$22) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$23) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$24) \int dx / \operatorname{ch}^2 x = \operatorname{th} x + C$$

$$25) \int dx / \operatorname{sh}^2 x = -\operatorname{cth} x + C$$

2) Примеры интегралов с тригонометрическими функциями.

Пример один.

$$\int dx / \cos x =$$

Умножим и поделим интеграл на $\cos x$.

$$= \int \cos x dx / \cos^2 x =$$

По основному тригонометрическому тождеству, заменим квадрат косинуса на выражение с синусом.

$$= \int \cos x dx / (1 - \sin^2 x) =$$

Внесем косинус под дифференциал, найдём его первообразную.

$$\int d \sin x / (1 - \sin^2 x) =$$

Сделаем замену переменной.

Пусть $\sin x = t$, тогда:

$$= \int dt / (1 - t^2) =$$

Это табличный интеграл. Найдём его по формуле.

$$1/2 \ln |(t + 1) / (t - 1)| + C =$$

Сделаем обратную замену.

$$= 1/2 \ln |(\sin x + 1) / (\sin x - 1)| + C$$

$$\text{Ответ: } 1/2 \ln |(\sin x + 1) / (\sin x - 1)| + C$$

Пример два.

$$\int dx / \sin x =$$

Умножим и поделим интеграл на $\sin x$, при этом ничего не изменится.

$$= \int \sin x dx / \sin^2 x =$$

Внесём синус под дифференциал, найдём его первообразную.

Заменим в знаменателе квадрат синуса на выражение с косинусом.

$$= - \int d \cos x / (1 - \cos^2 x) =$$

Аргументы одинаковые, найдём интеграл по формуле.

$$= - 1/2 \ln |(\cos x + 1) / (\cos x - 1)| + C$$

$$\text{Ответ: } - 1/2 \ln |(\cos x + 1) / (\cos x - 1)| + C$$

Пример три.

$$\int (\cos^3 x / \sin^2 x) dx =$$

Внесём один косинус под дифференциал, найдём его первообразную.

$$= \int \cos^2 x \, d \sin x / \sin^2 x =$$

Заменим квадрат косинуса на выражение с квадратом синуса.

$$= \int (1 - \sin^2 x) \, d \sin x / \sin^2 x =$$

Сделаем замену переменной.

Пусть $\sin x = t$, тогда

$$= \int (1 - t^2) \, dt / t^2 =$$

Поделим слагаемые числителя на знаменатель.

$$= \int dt / t^2 - \int t^2 \, dt / t^2 = \int dt / t^2 - \int dt =$$

Интегралы табличные найдём их по формулам.

$$= -1 / t - t + C =$$

Сделаем обратную замену.

$$= 1 / \sin x - \sin x + C$$

Ответ: $1 / \sin x - \sin x + C$

Пример четыре.

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx =$$

Заменим тангенс по тригонометрической формуле на выражение с косинусом.

$$= \int (1 / \cos^2 x - 1) dx =$$

Интеграл разности равен разности интегралов.

$$= \int dx / \cos^2 x - \int dx =$$

Это табличные интегралы.

$$= \operatorname{tg} x - x + C$$

Ответ: $\operatorname{tg} x - x + C$

Пример пять.

$$\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx =$$

Заменим котангенс по тригонометрической формуле на выражение с синусом.

$$= \int (1 / \sin^2 x - 1) \, dx =$$

Интеграл разности равен разности интегралов.

$$= \int dx / \sin^2 x - \int dx =$$

Интегралы табличные, находим их по формулам.

$$= - \operatorname{ctg} x - x + C$$

Ответ: $- \operatorname{ctg} x - x + C$

Пример шесть.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx =$$

Заменим тангенс частным синуса и косинуса.

$$= \int (\sin^3 x / \cos^3 x) \, dx =$$

Внесём один синус под дифференциал, найдём его первообразную.

$$= \int (\sin^2 x \, d(-\cos x) / \cos^3 x) \, dx =$$

Вынесем минус за интеграл и заменим по основному тригонометрическому тождеству синус на выражение с косинусом.

$$= - \int (1 - \cos^2 x) \, d \cos x / \cos^3 x) \, dx =$$

Сделаем замену переменной.

Пусть $\cos x = t$

$$= - \int (1 - t^2) \, dt / t^3 =$$

Поделим слагаемые числителя на знаменатель.

$$= - \int (1 / t^3 - t^2 / t^3) \, dt = - \int 1 / t^3 - 1 / t) \, dt =$$

Интеграл разности равен разности интегралов.

$$- 1 / t^3 dt + \int dt / t = - t^{-3} dt + \int dt / t =$$

Найдём по таблице интегралы.

$$- t^{-2} / (-2) + \ln |t| + C = 1 / 2t^2 + \ln |t| + C =$$

Сделаем обратную замену.

$$= 1 / 2\cos^2 x + \ln |\cos x| + C$$

$$\text{Ответ: } 1 / 2\cos^2 x + \ln |\cos x| + C$$

Пример семь.

$$\int \operatorname{ctg}^3 x dx =$$

Разложим на множители котангенс в кубе.

$$= \int \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg} x dx =$$

Заменим котангенс в квадрате на выражение с синусом.

$$= \int (1 / \sin^2 x - 1) \operatorname{ctg} x dx =$$

Раскроем скобку.

$$= \int (\operatorname{ctg} x / \sin^2 x - \operatorname{ctg} x) dx =$$

Интеграл разности равен разности интегралов.

$$= \int \operatorname{ctg} x dx / \sin^2 x - \int \operatorname{ctg} x dx =$$

Внесём под дифференциал функцию, найдём её первообразную.

$$= \int \operatorname{ctg} x d(-\operatorname{ctg} x) - \int \cos x / \sin x dx = - \int \operatorname{ctg} x d \operatorname{ctg} x - \int d \sin x / \sin x =$$

Аргументы одинаковые, найдём интеграл по таблице.

$$= - \operatorname{ctg}^2 x / 2 - \ln |\sin x| + C$$

$$\text{Ответ: } - \operatorname{ctg}^2 x / 2 - \ln |\sin x| + C$$

Секонс и косеканс.

Секонс - это единица делённая косинус.

$$\sec x = 1 / \cos x$$

косеконс - это единица делённая на синус.

$$\operatorname{cosec} x = 1 / \sin x$$

пример 8.

$$\int \operatorname{tg} x \sec x \, dx =$$

Запишем секонс через косинус.

$$\int (\operatorname{tg} x \times 1 / \cos^2 x) \, dx =$$

Внесём вторую функцию под дифференциал, найдём её первообразную.

$$= \int \operatorname{tg}^2 x \, d \operatorname{tg} x =$$

Аргументы одинаковые.

Найдём интеграл по таблице первообразных.

$$(\operatorname{tg}^3 x) / 3 + C$$

$$\text{Ответ: } 1/3 \operatorname{tg}^3 x + C$$

Пример девять.

$$\int \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx =$$

Запишем косеканс через синус.

$$\int \operatorname{ctg} x \times 1 / \sin^2 x \, dx =$$

Внесём под дифференциал вторую функцию.

$$= \int \operatorname{ctg}^2 x \, d \operatorname{ctg} x =$$

Аргументы одинаковые.

Найдём интеграл по таблице первообразных.

$$= - (\operatorname{ctg}^3 x) / 3 + C$$

$$\text{Ответ: } - (\operatorname{ctg}^3 x) / 3 + C$$

Пример.

$$\int \operatorname{tg} x \operatorname{cosec}^2 x \, dx =$$

Запишем косеканс через синус.

$$= \int \operatorname{tg} x \times 1 / \sin^2 x \, dx =$$

Внесём вторую функцию под дифференциал, найдём её первообразную.

$$= \int \operatorname{tg} x \, d(-\operatorname{ctg} x) = - \int \operatorname{tg} x \, d \operatorname{ctg} x =$$

Заменяем тангенс на котангенс, по тригонометрической формуле.

$$= - \int 1 / \operatorname{ctg} x \, d \operatorname{ctg} x = - \int d \operatorname{ctg} x / \operatorname{ctg} x =$$

Аргументы одинаковые.

Найдём интеграл по таблице первообразных.

$$= - \ln |\operatorname{ctg} x| + C$$

Ответ: $-\ln |\operatorname{ctg} x| + C$

Пример 10.

$$\int \operatorname{ctg}^3 x \sec^2 x \, dx =$$

Запишем секанс через косинус.

$$= \int \operatorname{ctg} x \times 1 / \cos^2 x \, dx =$$

Внесём вторую функцию под дифференциал.

Найдём её первообразную.

$$= \int \operatorname{ctg}^3 x \, d \operatorname{tg} x =$$

Заменяем котангенс на тангенс по тригонометрической формуле.

$$= \int 1 / \operatorname{tg}^3 x \, d \operatorname{tg} x = \int \operatorname{tg}^{-3} x \, d \operatorname{tg} x =$$

Найдём интеграл по формуле для степенной функции. так как аргументы одинаковые.

$$= \operatorname{tg}^{-2} x / (-2) + C = -1 / 2 \operatorname{tg}^2 x + C$$

Ответ: $-1 / 2 \operatorname{tg}^2 x + C$

Пример 11.

$$\int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x \, dx =$$

Запишем секанс через косинус.

$$= \int \operatorname{tg}^4 x \times 1 / \cos^4 x \, dx =$$

Запишем произведение по-другому.

$$= \int \operatorname{tg}^4 x / \cos^2 x \times 1 / \cos^4 x \, dx =$$

Внесём вторую функцию под дифференциал.

Найдём её первообразную.

$$= \int \operatorname{tg}^4 x / \cos^2 x \, d \operatorname{tg} x =$$

Заменим по тригонометрической формуле секанс в квадрате на выражение с тангенсом.

$$= \int \operatorname{tg}^4 x \times 1 / \cos^2 x \, d \operatorname{tg} x = \int \operatorname{tg}^4 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, d \operatorname{tg} x =$$

Сделаем замену переменной.

Пусть $\operatorname{tg} x = t$

$$= \int t^4 (1 + t^2) \, dt =$$

Раскроем скобку.

$$= \int (t^4 + t^6) \, dt =$$

Интеграл суммы равен сумме интегралов.

$$= \int t^4 \, dt + \int t^6 \, dt =$$

Интегралы найдём по формуле для степенной функции.

$$= t^5 / 5 + t^7 / 7 + C =$$

Сделаем обратную замену переменной.

$$= \operatorname{tg}^5 x / 5 + \operatorname{tg}^7 x / 7 + C =$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{tg}^5 x / 5 + \operatorname{tg}^7 x / 7 + C$$

Пример 12.

$$\int \sin^2 x \, dx =$$

По формуле понижения степени запишем синус через косинус двойного угла.

$$\int 1/2 (1 - \cos 2x) dx = \int (1/2 - 1/2 \cos 2x) dx =$$

Интеграл разности равен разности интегралов.

$$= \int 1/2 dx - 1/2 \int \cos 2x dx =$$

Умножим и поделим второй интеграл на два.

$$= \int 1/2 dx - 1/4 \int \cos 2x d2x =$$

Аргументы одинаковые.

Найдём интегралы по таблице первообразных.

$$= 1/2 x - 1/4 \sin 2x + C$$

Ответ: $1/2 x - 1/4 \sin 2x + C$

Пример 13.

$$\int \cos^2 x dx =$$

По формуле понижения степени запишем квадрат синуса через косинус двойного угла.

$$= \int 1/2 (1 + \cos 2x) dx = (1/2 + 1/2 \cos 2x) dx =$$

Интеграл суммы равен сумме интегралов.

$$= \int 1/2 dx + 1/2 \int \cos 2x dx =$$

Умножим и поделим второй интеграл на два.

$$\int 1/2 dx + 1/4 \int \cos 2x d2x =$$

Аргументы одинаковые.

Найдём интегралы по таблице первообразных.

$$= 1/2 x + 1/4 \sin 2x + C$$

Ответ: $1/2 x + 1/4 \sin 2x + C$

Пример 14.

$$\int \sin^3 x dx =$$

Понизим степень синуса по тригонометрической формуле.

$$= 1/4 (3 \sin x - \sin 3x) dx =$$

Раскроем скобки.

Запишем разность интегралов.

$$= 3/4 \int \sin x dx - 1/4 \int \sin 3x dx =$$

Умножим и поделим второй интеграл на три.

$$= 3/4 \int \sin x dx - 1 / 12 \int \sin 3x d 3x =$$

Аргументы одинаковые.

Найдём интегралы по таблице.

$$= - 3/4 \cos x + 1/12 \cos 3x + C$$

Ответ: $- 3/4 \cos x + 1 / 12 \cos 3x + C$

Пример 15.

$$\int \cos^3 x dx =$$

Понизим степень косинуса по тригонометрической формуле.

$$= \int 1/4 (3 \cos x + \cos 3x) dx =$$

Раскроем скобку и запишем сумму интегралов.

$$= \int 3/4 \cos x dx + 1/4 \int \cos 3x dx =$$

Умножим и поделим второй интеграл на три.

$$= \int 3/4 \cos x dx + 1/12 \int \cos 3x d 3x =$$

Аргументы одинаковые.

Найдём интегралы по таблице первообразных.

$$= 3/4 \sin x + 1/12 \sin 3x + C$$

Ответ: $3/4 \sin x + 1/12 \sin 3x + C$

Пример 16.

$$\int \sin x \cos 2x \, dx =$$

По формулам произведения запишем.

$$= \int (1/2 \sin (x - 2x) + \sin (x + 2x)) \, dx = 1/2 \int (\sin (-x) + \sin 3x) \, dx =$$

Так как синус нечётная функция, вынесем минус за функцию.

$$1/2 \int (\sin 3x - \sin x) \, dx =$$

Интеграл разности равен разности интегралов.

$$= 1/2 \int \sin 3x \, dx - 1/2 \int \sin x \, dx =$$

Умножим и поделим первый интеграл на 3.

$$= -1/6 \int \sin 3x \, d3x + 1/2 \int \sin x \, dx =$$

Аргументы одинаковые.

Находим интегралы по таблице первообразных.

$$= -1/6 \cos 3x + 1/2 \cos x + C$$

$$\text{Ответ: } -1/6 \cos 3x + 1/2 \cos x + C$$

Пример 17.

$$\int \sin 2x \sin 3x \, dx =$$

По формулам произведения запишем.

$$= \int 1/2 (\cos (2x - 3x) - \cos (2x + 3x)) \, dx = 1/2 \int (\cos (-x) - \cos 5x) \, dx =$$

Так как косинус чётная функция, то минус пропадает.

$$= 1/2 \int (\cos x - \cos 5x) \, dx =$$

Интеграл разности равен разности интегралов.

$$= 1/2 \int \cos x \, dx - 1/2 \int \cos 5x \, dx =$$

Умножим и поделим второй интеграл на пять.

$$= 1/2 \int \cos x \, dx - 1/10 \int \cos 5x \, d5x =$$

Аргументы одинаковые.

Найдём интегралы по таблице первообразных.

$$= 1/2 \sin x - 1/10 \sin 5x + C$$

Ответ: $1/2 \sin x - 1 / 10 \sin 5x + C$

Пример 18.

$$\int \cos 3x \cos x \, dx =$$

По формулам произведения запишем.

$$= \int 1/2 (\cos (3x - x) + \cos (3x + x)) \, dx = 1/2 \int (\cos 2x + \cos 4x) \, dx =$$

Интеграл суммы равен сумме интегралов.

$$= 1/2 \int \cos 2x \, dx + 1/2 \int \cos 4x \, dx =$$

Сделаем одинаковыми аргументы интегралов.

$$= 1/4 \int \cos 2x \, d2x + 1/8 \int \cos 4x \, d4x =$$

Аргументы одинаковые.

Найдём интегралы по таблице первообразных.

$$= 1/4 \sin 2x + 1/8 \sin 4x + C$$

Ответ: $1/4 \sin 2x + 1/8 \sin 4x + C$

Пример 19.

$$\int dx / \sin^3 2x =$$

Разложим синус двойного угла.

$$= \int dx / (2 \sin x \cos x)^3 = 1/2^3 \times \int dx / \sin^3 x \cos^3 x = 1/8$$

$$\int dx / \sin^3 x \cos^3 x =$$

Умножим и поделим дробь на $\cos^3 x$.

$$1/8 \int \cos^3 x \, dx / \sin^3 x \cos^6 x =$$

Заменим частное косинуса и синуса на котангенс.

$$= 1/8 \int \operatorname{ctg}^3 x \times 1/\cos^4 x \times 1 / \cos^2 x \, dx =$$

Внесём последнюю функцию под дифференциал.

Найдём её первообразную.

$$1/8 \int \operatorname{ctg}^3 x \times (1/\cos^2 x)^2 dx =$$

Заменим все функции на выражение с тангенсом.

$$= 1/8 \int \operatorname{ctg}^3 x \times (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 dx =$$

Сделаем замену переменной.

Пусть $\operatorname{tg} x = t$

$$= 1/8 \int 1/t^3 \times (1 + t^2)^2 dt =$$

Разложим скобку по формуле квадрата суммы.

$$1/8 \int ((1 + 2t^2 + t^4)/t^3) dt =$$

Поделим слагаемые числителя на знаменатель.

$$1/8 \int (1/t^3 + 2t^2/t^3 + t^4/t^3) = 1/8 \int (1/t^3 + 2/t + t) =$$

найдем табличные интегралы.

$$= 1/8 (-1/2 t^2 + 2 \ln |t| + t^2/2) + C =$$

Сделаем обратную замену переменной.

$$1/8 (-1/2 \operatorname{tg}^2 x + 2 \ln |\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg}^2 x/2) + C =$$

$$\text{Ответ: } -1/16 \operatorname{tg}^2 x + 1/4 \ln |\operatorname{tg} x| + 1/16 \operatorname{tg}^2 x + C =$$

Пример 20.

$$\int dx / (1 + \sin x) =$$

Умножим и поделим интеграл на $(1 - \sin x)$.

$$= \int (1 - \sin x) dx / (1 - \sin x)(1 + \sin x) =$$

Свернём выражение в знаменателе по формуле разности квадратов.

$$= \int (1 - \sin x) dx / (1 - \sin^2 x) =$$

Заменим выражение в знаменателе по формуле основного тригонометрического тождества на $\cos^2 x$.

$$\int (1 - \sin x) dx / \cos^2 x =$$

Поделим слагаемые числителя на знаменатель.

$$\int (1 / \cos^2 x - \sin x / \cos^2 x) dx =$$

Интеграл разности равен разности интегралов.

$$= \int dx / \cos^2 x - \int \sin x dx / \cos^2 x =$$

Внесём синус под дифференциал, найдём его первообразную.

$$\int dx / \cos^2 x - \int d(-\cos x) / \cos^2 x = \int dx / \cos^2 x - \int d \cos x / \cos^2 x =$$

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.