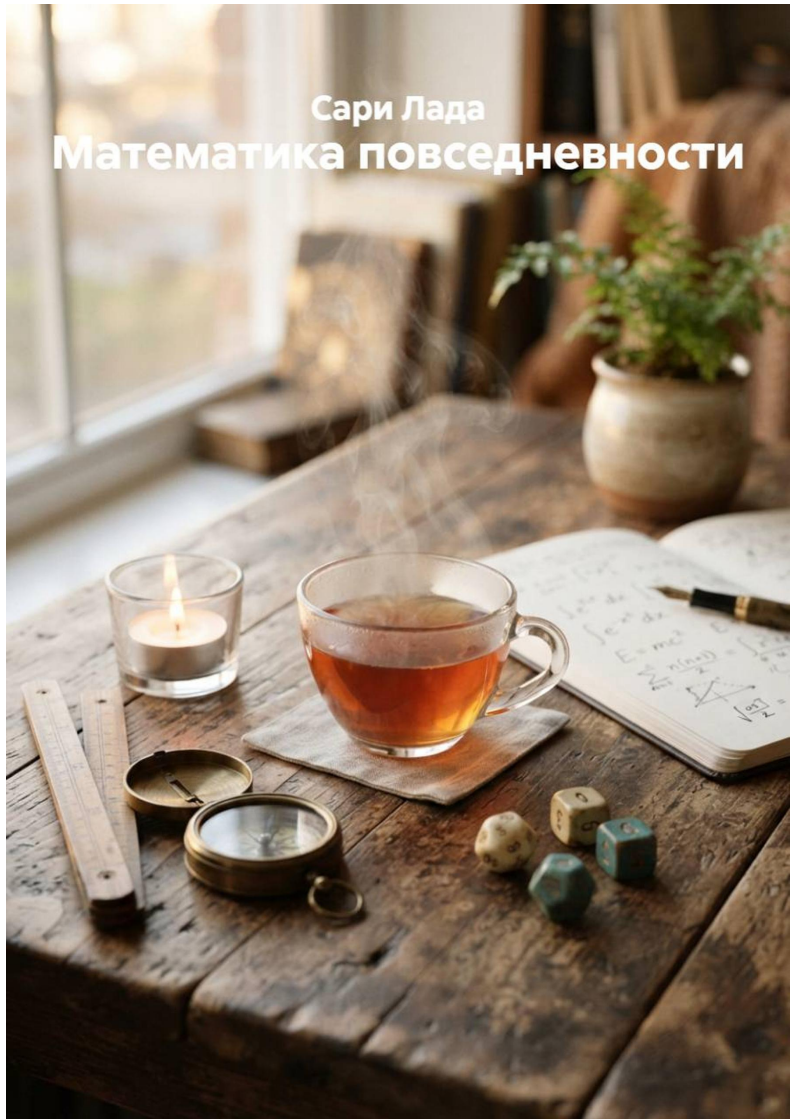


Сари Лада
Математика повседневности



Сари Лада

Математика повседневности

<https://litres.ru/74226882>

SelfPub; 2026

Аннотация

Вы паркуетесь параллельно бордюру — и уже пользуетесь понятием предела. Наливаете чай и ждёте, пока он остынет, — наблюдаете дифференциальное уравнение в действии. Смотрите на обложку журнала со спортсменом, который "внезапно" перестал побеждать, — это статистика, а не проклятие.

Высшая математика давно перестала быть языком одних лишь университетских аудиторий. Она — в том, как навигатор в телефоне выбирает дорогу, как банк считает проценты по вкладу, как эпидемия распространяется по офису и как алгоритм угадывает, какой фильм вам понравится вечером.

Эта книга проведёт вас через девять областей высшей математики — от пределов и производных до теории игр и нейросетей — не как через свод формул, а как через способ смотреть на мир. Здесь встретятся поссорившиеся из-за первенства Ньютон и Лейбниц, Гильберт с гостиницей, в которой всегда найдётся свободный номер, и Ада Лавлейс, представившая компьютер за сто лет до его изобретения.

Содержание

Предисловие	5
ЧАСТЬ I. БЕСКОНЕЧНОСТЬ И ПРЕДЕЛ — ЯЗЫК ПРИБЛИЖЕНИЯ	7
Глава 1. Что такое предел и почему мы им пользуемся, не замечая	7
Глава 2. Бесконечно малые: как наука приручила «почти ничто»	10
Глава 3. Парадоксы бесконечности в обычной жизни	12
ЧАСТЬ II. ПРОИЗВОДНАЯ — МАТЕМАТИКА ИЗМЕНЕНИЙ	15
Глава 4. Скорость, ускорение и спидометр	15
Глава 5. Оптимизация решений: производная как поиск лучшего момента	17
Глава 6. Экономика на кончике производной: предельные величины	19
ЧАСТЬ III. ИНТЕГРАЛ — НАКОПЛЕНИЕ И ПЛОЩАДЬ	21
Глава 7. Как накапливается эффект: от воды в ванне до чтения книг	21
Глава 8. Интеграл в медицине, кредитах и энергии	23
Глава 9. Площадь под кривой жизни:	25

измерение непрерывных процессов
Конец ознакомительного фрагмента.

Сари Лада

Математика

повседневности

Предисловие

Высшая математика кажется наукой, запертой в аудиториях университетов — где-то там, среди пределов, интегралов и дифференциальных уравнений, придуманных для того, чтобы пугать студентов инженерных специальностей. Но это не так. Всё это время высшая математика была рядом: в том, как навигатор в телефоне прокладывает маршрут, как банк рассчитывает проценты по вкладу, как распространяется вирус простуды в офисе, как рекомендательная система угадывает, какой фильм вы захотите посмотреть вечером, и даже в том, как остывает чай в кружке.

Эта книга — попытка показать высшую математику не как набор формул, а как способ мышления. Всё же в конце каждой главы приведена одна ключевая формула из этой темы — не для вычислений, а как «якорь», который помогает запомнить идею и увидеть за конкретным примером из жизни общий математический принцип.

Книга разделена на девять частей, каждая из которых по-

священа одному большому разделу высшей математики. Части не обязательно читать по порядку — каждая написана так, чтобы быть самостоятельным путешествием.

ЧАСТЬ I. БЕСКОНЕЧНОСТЬ И ПРЕДЕЛ — ЯЗЫК ПРИБЛИЖЕНИЯ

Глава 1. Что такое предел и почему мы им пользуемся, не замечая

Представьте, что вы идёте к стене, каждый раз преодолевая половину оставшегося расстояния. Сначала половину комнаты, потом половину оставшегося, потом ещё половину — и так до бесконечности. Формально вы никогда не дойдёте до стены. На практике вы, конечно, в неё упрётесь. Это старейший парадокс математики — апория Зенона, сформулированная древнегреческим философом Зеноном Элейским примерно в 450 году до н. э. и остававшаяся не до конца разрешённой почти два тысячелетия — и разгадывается он одним из самых важных понятий высшей математики: пределом.

Предел — это то значение, к которому стремится процесс, даже если он никогда не достигает его за конечное число шагов. Идея кажется абстрактной, но мы используем её постоянно. Когда вы паркуетесь параллельно бордюру, вы со-

вершаете серию всё более мелких корректировок руля, приближаясь к идеальному положению машины — и в какой-то момент останавливаетесь, потому что дальнейшие поправки уже не имеют значения. Это и есть предел на практике: точность приближения становится достаточной, и процесс останавливается.

Похожая логика лежит в основе того, как работают весы в супермаркете или термометр в квартире: их показания — это предел бесконечной последовательности всё более точных измерений, где мы просто договорились остановиться на удобном уровне детализации (граммы, десятые доли градуса).

Предел также объясняет, почему некоторые вещи в жизни никогда не достигают «идеала», но приближаются к нему сколь угодно близко. Спортсмен, улучшающий рекорд на сотые доли секунды, компания, снижающая процент брака на производстве, — все они движутся к пределу, который, возможно, никогда не будет достигнут полностью, но к которому можно приближаться бесконечно.

Если каждый следующий шаг короче предыдущего в q раз (в нашем примере — вдвое, то есть $q = 0,5$), а первый шаг имеет длину a_1 , то итоговое расстояние до стены — это сумма всех шагов, то есть сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

S — итоговое расстояние до стены, a_1 — длина первого шага, q — во сколько раз каждый следующий шаг короче предыдущего.

Глава 2. Бесконечно малые: как наука приручила «почти ничто»

Ньютон и Лейбниц, работая независимо друг от друга в 1665–1675 годах, придумали способ работать с величинами, которые бесконечно малы, но не равны нулю. Это звучит как философский трюк, но именно эта идея позволила описать движение, рост и изменение — то, чем непрерывно занят окружающий мир. Открытие независимо друг от друга, что обычно повод для научного праздника, в этот раз обернулось склокой: Ньютон, пользуясь положением президента Лондонского королевского общества, добился, чтобы специальная «независимая» комиссия этого же общества официально обвинила Лейбница в плагиате. Спор о первенстве длился десятилетиями и поссорил математиков Англии и континентальной Европы почти на столетие.

В повседневной жизни мы постоянно имеем дело с процессами, которые удобно представлять как сумму бесконечно многих бесконечно малых шагов. Например, когда вы наполняете ванну водой, объём воды в любой момент времени — это результат бесконечно частого, бесконечно малого добавления жидкости.

Идея бесконечно малых также объясняет, почему инженеры могут рассчитывать нагрузку на мост, а метеорологи — скорость ветра в конкретной точке неба: сложные непре-

рывные системы разбиваются на воображаемые бесконечно малые кусочки, каждый из которых уже достаточно прост, чтобы его понять, а затем эти кусочки снова «собираются» в целое.

Мы берём два очень близких момента времени, делим изменение расстояния на изменение времени — а потом мысленно сближаем эти моменты всё теснее и теснее, пока промежуток между ними не станет исчезающе малым.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

производная — это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда шаг Δx становится бесконечно малым; именно так формализуется идея «мгновенной» скорости изменения.

Глава 3. Парадоксы бесконечности в обычной жизни

Бесконечность обманчива именно потому, что наша интуиция откалибрована на конечные числа. Представьте гостиницу с бесконечным числом номеров, все из которых заняты. Может ли она принять ещё одного гостя? Удивительно, но да — если попросить каждого постояльца переехать из номера n в номер $n+1$, освободится первый номер. Это знаменитый парадокс «Отеля Гильберта», который немецкий математик Давид Гильберт использовал в лекции 1924 года, чтобы наглядно показать свойства бесконечных множеств, и он показывает: бесконечность не просто «очень много», она устроена иначе, чем любое конечное число. У этой истории есть послесловие. Гильберт всю жизнь верил, что математику можно свести к конечному набору правил, из которых выводимо буквально всё истинное, и в 1930 году произнёс в радиоэфире знаменитую фразу «Мы должны знать — мы будем знать». Но буквально накануне, на той же самой конференции, никому тогда не известный 24-летний логик Курт Гёдель уже доказал теорему о неполноте: в любой достаточно сложной математической системе всегда найдутся истинные утверждения, которые в принципе нельзя ни доказать, ни опровергнуть её средствами. Гильберт, по свидетельствам современников, узнал об этом далеко не сразу и был этим открытием

крайне раздосадован.

В повседневной жизни отголоски этой логики встречаются в так называемом парадоксе дней рождения, в устройстве очередей (почему увеличение количества касс вдвое не всегда сокращает очередь вдвое) и в том, как мы воспринимаем деление ресурсов: интуитивно кажется, что бесконечно делимый ресурс (например, время) можно распределить «поровну до бесконечности», но на практике всегда есть предел практической делимости — секунда, минута, рабочий день.

Понимание того, что бесконечность подчиняется своим, не похожим на конечные числа, правилам, помогает избегать логических ловушек — например, ошибочного вывода о том, что раз ресурсов «бесконечно много», ими можно распоряжаться без ограничений здесь и сейчас.

$$n \rightarrow n + 1$$

правило переселения постояльцев отеля Гильберта — простое взаимно-однозначное соответствие, которое осво-

бождает номер 1, даже когда гостиница уже «полностью занята».

ЧАСТЬ II. ПРОИЗВОДНАЯ — МАТЕМАТИКА ИЗМЕНЕНИЙ

Глава 4. Скорость, ускорение и спидометр

Производная отвечает на один простой вопрос: насколько быстро что-то меняется прямо сейчас. Спидометр в автомобиле — это готовый, овестьствлённый ответ на этот вопрос. Он не показывает, сколько километров вы проехали, он показывает, как быстро меняется пройденное расстояние в данный конкретный момент — то есть буквально показывает значение производной, в данном случае скорость.

Если спидометр — это производная расстояния по времени, то нажатие на педаль газа меняет уже саму скорость — а изменение скорости называется ускорением, то есть производной от производной. Мы ощущаем ускорение телом: именно оно вжимает нас в кресло при разгоне и толкает вперёд при торможении, хотя скорость в этот момент может быть любой — важно именно то, как быстро она меняется.

Эта же логика работает не только в физике. Когда экономисты говорят, что «инфляция замедляется», это не значит, что цены снижаются — это значит, что снижается ско-

рость роста цен, то есть производная от уровня цен становится меньше, оставаясь при этом положительной. Путаница между «величиной» и «скоростью её изменения» — одна из самых частых ошибок в чтении новостей об экономике, и производная — именно тот инструмент, который эту путаницу проясняет.

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt}$$

скорость v — производная пути s по времени; ускорение a — производная скорости по времени (то есть вторая производная пути).

Глава 5. Оптимизация решений: производная как поиск лучшего момента

Одно из самых практичных свойств производной в том, что в точке максимума или минимума какой-либо величины скорость её изменения равна нулю. Этот приём отыскания экстремумов через равенство «скорости изменения» нулю предложил ещё в 1630-х годах французский юрист и математик-любитель Пьер Ферма, задолго до того, как Ньютон и Лейбниц оформили производную как самостоятельное понятие. Мяч, подброшенный вверх, на мгновение останавливается в высшей точке — его скорость (производная высоты) в этот момент равна нулю, прежде чем он начнёт падать.

Эта идея лежит в основе огромного числа повседневных решений об оптимизации. Пекарня, определяющая, сколько хлеба выпекать, чтобы одновременно не выбрасывать лишнее и не упускать продажи, ищет ту самую точку, где предельная выгода от выпечки ещё одной булки уравнивается с предельными издержками. Приложение для доставки еды, выбирающее оптимальную цену на позицию в меню, ищет точку, где дальнейшее повышение цены перестает увеличивать выручку. Во всех этих случаях интуитивно нащупывается тот же принцип, который производная формализует:

лучшее решение часто находится там, где скорость изменения результата от дальнейших усилий обращается в ноль.

$$f'(x) = 0$$

в точке максимума или минимума величины скорость её изменения обращается в ноль — именно так пекарня нащупывает оптимальный объём выпечки, а мяч застывает в верхней точке полёта.

Глава 6. Экономика на кончике производной: предельные величины

Экономисты используют понятие «предельной величины» повсеместно: предельная полезность, предельные издержки, предельный доход. Всё это — производные. В экономическую науку эту идею в 1870-х годах независимо друг от друга ввели участники так называемой «маржиналистской революции» — Уильям Джевонс, Карл Менгер и Леон Вальрас. Примечательно, что все трое работали в разных странах — Джевонс в Манчестере, Менгер в Вене, Вальрас в Лозанне — и ни один не знал о работах остальных. Предельная полезность — это то, насколько сильно вырастет ваше удовольствие от ещё одного кусочка пиццы, когда вы уже съели три. Обычно она убывает: четвёртый кусок радуется меньше первого, а десятый может не радовать вовсе — и здесь мы интуитивно оперируем производной насыщения по количеству съеденного. В каждом случае решение — тратить ли ещё один час, ещё один рубль, ещё одно усилие — принимается не по общей величине выгоды, а по её предельному приращению.

$$MC = \frac{dC}{dQ}$$

предельные издержки — производная общих издержек C по объёму выпуска Q : во сколько обойдётся производство ещё одной, дополнительной единицы товара. Например, если издержки завода заданы функцией $C(Q) = 3Q^2 + 5Q + 100$, то предельные издержки $MC = 6Q + 5$ — а значит, при любом объёме Q каждая следующая единица товара обходится дороже предыдущей ровно на $6Q + 5$.

ЧАСТЬ III. ИНТЕГРАЛ — НАКОПЛЕНИЕ И ПЛОЩАДЬ

Глава 7. Как накапливается эффект: от воды в ванне до чтения книг

Если производная отвечает на вопрос «как быстро меняется величина», то интеграл — на противоположный: «сколько накопилось, если известна скорость изменения». Наполняя ванну водой при известном напоре крана, можно вычислить, сколько воды накопится за десять минут, даже если напор менялся. Интеграл — это математический способ «сложить» бесконечно много бесконечно малых порций и получить итоговую сумму.

Мы постоянно интуитивно интегрируем в быту. Если вы читаете по 20 страниц в день, но иногда пропускаете дни, а иногда читаете вдвое больше обычного, то общее количество прочитанных страниц за месяц — это интеграл вашей «скорости чтения» по времени. То же самое происходит, когда вы копите деньги при переменном доходе, когда организм накапливает усталость за неделю с разной нагрузкой по дням, или когда счётчик воды в квартире суммирует расход при постоянно меняющемся напоре.

$$V = \int Q(t) dt$$

объём воды в ванне V — интеграл мгновенного напора крана $Q(t)$ по времени: сумма бесконечно многих бесконечно малых порций жидкости.

Глава 8. Интеграл в медицине, кредитах и энергии

В медицине интеграл помогает понять, как действует лекарство: врача интересует не только концентрация вещества в крови в конкретный момент, но и суммарное воздействие препарата за всё время его нахождения в организме — то есть площадь под кривой концентрации, вычисляемая именно интегрированием.

В финансах интеграл прячется в расчёте процентов по вкладу с меняющейся ставкой или в переменных платежах по кредиту: банк суммирует (интегрирует) начисления за каждый бесконечно малый промежуток времени, чтобы получить итоговую сумму долга или дохода. В энергетике счётчик электричества делает буквально то же самое: мгновенная мощность, потребляемая холодильником, компьютером и чайником, меняется поминутно, но счётчик исправно интегрирует эту мощность по времени, выдавая итоговое число киловатт-часов в конце месяца.

$$AUC = \int C(t) dt$$

суммарное воздействие лекарства на организм врачи оценивают как площадь под кривой концентрации $C(t)$ во времени — её и называют AUC, «площадь под кривой».

Глава 9. Площадь под кривой жизни: измерение непрерывных процессов

Геометрически интеграл — это площадь фигуры, ограниченной кривой. Эта простая идея объясняет множество измерительных задач: как рассчитать площадь неправильно-го земельного участка, объём водохранилища неправильной формы или количество краски, нужное для покраски изогнутой поверхности лодки — при условии, что форму этой поверхности можно описать математической функцией.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.