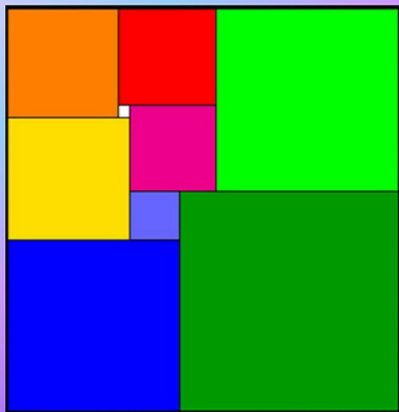
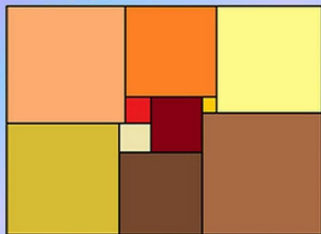


Владимир Трошин

# 200 заданий в рисунках

## Квадрирование



# **Владимир Валентинович Трошин**

## **200 заданий в рисунках.**

### **Квадрирование.**

*[http://www.litres.ru/pages/biblio\\_book/?art=73556533](http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=73556533)*

*SelfPub; 2025*

#### **Аннотация**

Данный сборник продолжает цикл занимательных дидактических материалов. Предназначен для тех, кто интересуется головоломками, логическими задачами. Его может использовать учитель, чтобы увлечь учащихся решением нестандартных геометрических задач. Задания выполнены на карточках, как раздаточный материал. Решение головоломок поможет скоротать время в дальней дороге или с пользой провести время на отдыхе. Высший продукт развития Вселенной – мозг человека. Естественный отбор земной природы создал его, чтоб он был украшением всего того, что было, есть и будет. Чтоб из среды животной выделялись люди умом своим. Ведь назначение Человека – мыслить!

# Содержание

|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| Квадрирование                     | 4  |
| Конец ознакомительного фрагмента. | 23 |

# Владимир Трошин

## 200 заданий в рисунках.

### Квадрирование.

## Квадрирование

В одном из выпусков занимательных дидактических материалов было начато рассмотрение задач на разрезание (250 заданий в рисунках. *Разрезание фигур и задачи со спичками В.В. Трошин – Москва: ЛитРес: Самиздат, 2020*).

Были рассмотрены задачи на дробление двух видов:

- а) разрезать данную фигуру на заданное число равных частей, или, как говорят математики – конгруэнтных фигур;
- б) заданную фигуру разделить определенным количеством прямых на максимально возможное число частей не обязательно равных.

Среди 150 рассмотренных задач пять заданий можно отнести к особому виду заданий на разрезание, который имеет богатую историю и заслуживает специального рассмотрения. Это задачи на квадрирование фигур.

*Квадрированием прямоугольника или квадрата* называют разбиение исходной фигуры (прямоугольника или квадрата) на конечное число более мелких непересекающихся *квадра-*

тов. Вместо слова разрезание будем употреблять термины дробление или разбиение, так как при решении таких задач чаще всего можно не разрезать фигуру ножницами, а проводить ее разбиение с помощью карандаша. Рассматривать будем прямоугольники и квадраты, длины *сторон* которых *выражаются целыми числами* (стороны соизмеримы).

На первый взгляд квадрирование не вызывает никаких проблем. Если задан квадрат с целочисленными размерами сторон  $n \times n$ , то его можно тривиально разделить на  $n^2$  единичных квадратов. Задача станет сложнее, если потребовать, чтобы квадратов в разбиении было как можно меньше. Еще сложнее будет выполнить требование, чтобы все квадраты в разбиении имели попарно различные стороны.

Считается, что первая задача в занимательной математике, связанная с квадрированием квадрата, была опубликована 1902 году английским мастером головоломок Генри Дьюдени в Лондонском журнале. Головоломка называлась «Шкатулка леди Изабель».

В ней требовалось разбить квадрат на меньшие квадраты разного размера, но кроме квадратов в разбиение входила одна прямоугольная полоска. Впервые была высказана сама идея квадрирования квадрата, но чистоту задания нарушала прямоугольная полоска и не целые значения сторон квадратов в решении.

Вообще вызывает удивление, что древние математики, практически создавшие всю элементарную геометрию, ста-

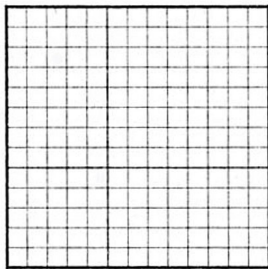
вившие вопрос о квадратуре круга, обошли внимание квадрирование квадрата. В средние века тоже не возникло такой мысли, только в XX веке проблема постепенно всплыла.

В 1903 году Макс Ден первым из математиков занимался расчленением прямоугольников на квадраты, то есть квадрированием прямоугольников. Ден учился в Геттингене под руководством Гильберта, получив докторскую степень в 1900 году. Макс Ден изучал проблему квадрирования и доказал, что прямоугольник можно квадрировать тогда и только тогда, когда его стороны соизмеримы. Из этого утверждения следует ранее указанное требование целочисленности сторон рассматриваемых прямоугольников и квадратов.

В 1907 году американский мастер головоломок Сэмюэль Лойд опубликовал головоломку «Лоскутное одеяло», в которой говорилось: «квадратное лоскутное одеяло, состоящее из 169 квадратных лоскутов одинакового размера, нужно разделить на наименьшее число квадратных кусочков путем разрезания по решетчатым линиям». Это задача на квадрирование квадрата в чистом виде.

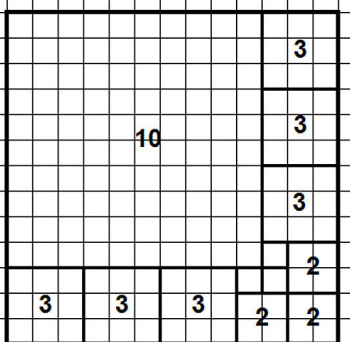
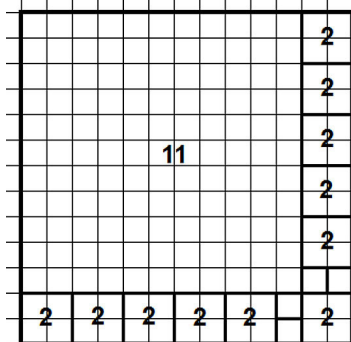
Лойд и Дьюдени состояли в переписке и сообщали друг другу о своих придумках, поэтому и Генри Дьюдени тоже опубликовал эту задачу только под названием «Одеяло миссис Перкинс». Под этим названием задача фигурировала в дальнейших исследованиях процесса квадрирования квадрата. Хотя никто нисколько не умоляет вклад Сэмюэля Лойда в постановку проблемы квадрирования квадрата.

Взяв за отправную точку эту задачу, рассмотрим подробнее задачу «одеяло миссис Перкинс», чтобы в самом начале повествования поговорить о специальной терминологии процесса квадрирования.



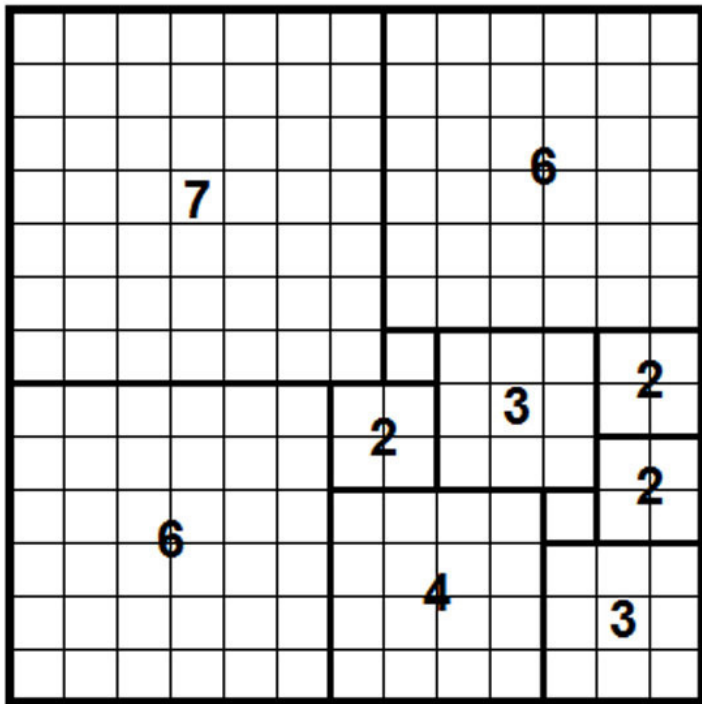
Квадрат  $13 \times 13$  можно разделить на 169 маленьких квадратиков. А сумеете ли вы разбить его на меньшее количество квадратов разных размеров, чтобы их было хотя бы раз в десять поменьше чем 169?

Итак, квадрат  $13 \times 13$  требуется разбить на наименьшее число квадратов путем разрезания по линиям квадратной сетки. Число 13 простое, поэтому использовать делимость не получится. Начнем квадрирование с левого верхнего угла. Если взять один квадрат большой, например  $12 \times 12$  или  $11 \times 11$ , то оставшееся пространство придется заполнять мелкими квадратами, а чем они мельче, тем их больше. Взяв первый квадрат  $10 \times 10$  можно уложиться в 13 квадратов дробления.



Но это не предел. Оптимальное решение состоит из 11 квадратов. При этом первый квадрат разбиения нужно брать со стороной близкой к половине длины стороны исходного квадрата.

Вот оптимальное и единственное (с точностью до вращения и отражения относительно внешней стороны) решение с 11 квадратами в разбиении.



Рассмотрим важные сведения, связанные с терминологией принятой в дальнейшем изложении материала.

На рисунках число, стоящее внутри квадрата, обозначает длину его *стороны*, а не площадь. Единичные квадраты обозначать цифрой не будем.

*Порядком* квадрата, разбитого на составные квадраты, на-

зывается *число составляющих его квадратов*.

Квадрирование называется *оптимальным*, если разбиение меньшего порядка невозможно.

Квадрирование называется *тривиальным*, если абсолютно все квадраты в разбиении одинаковы.

Квадрирование называется *совершенным (идеальным)*, если все квадраты в разбиении имеют попарно различные по величине стороны.

Квадрирование называется *простым*, если в разбиении нельзя выделить подмножество квадратов, образующих квадрат или прямоугольник (не считая отдельных квадратов). В противном случае квадрирование называется *составным*.

Рассмотренное выше решение задачи с «одеялом миссис Перкинс» является *оптимальным* (минимальный порядок равен 11), но не является простым (то есть такое решение *составное*), так как два квадрата со сторонами 2, стоящие у правой границы, образуют прямоугольник  $2 \times 4$ . Тем более это решение *не является совершенным*, так как размеры квадратов неоднократно повторяются.

Решение каждой задачи на квадрирование требует соответствующего рисунка с числами, обозначающими длины сторон и с соблюдением пропорций. На выполнение такого рисунка уходит много времени. Поэтому для записи решений придумано специальное обозначение. Последовательно записываются длины сторон квадратов, прилегающих к го-

горизонтальным линиям, начиная с верхней границы. Горизонтальные отрезки берутся в том порядке, как они следуют по вертикали сверху вниз. В этом конкретном примере запись будет такая:  $\{(7, 6), (1, 3, 2), (6, 2), (2), (4, 1), (3)\}$ . Количество чисел в записи соответствует порядку квадрирования. Сумма чисел в первой круглой скобке дает нам сторону квадрата. Если же такую запись применять для квадрирования прямоугольника, то сумма чисел в первой скобке даст длину прямоугольника. По такой краткой записи всегда можно выполнить рисунок. Эти обозначения придумал К. И. Баувкамп.

Для того чтобы вникнуть в процесс квадрирования рассмотрим квадрирование квадратов по мере увеличения сторон.

1. Единичный квадрат не поддается разбиению, он уже квадрирован с порядком 1.

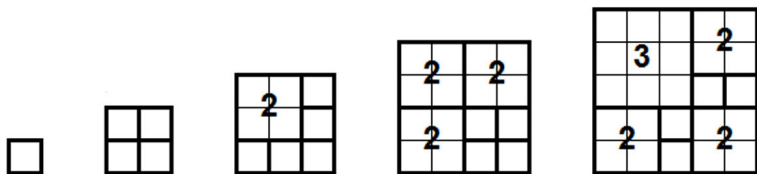
2. Квадрат со стороной 2 допускает только тривиальное квадрирование на четыре одинаковых единичных квадрата. Порядок равен 4. В дальнейшем будем избегать тривиального квадрирования и требовать, чтобы в разбиении были квадраты разных (хотя бы двух) размеров. Тривиальное квадрирование допускается только для квадрата  $2 \times 2$ !

3. В квадрате со стороной 3 естественно выделить квадрат со стороной 2 и, ничего другого не остается, как заполнить оставшееся пространство единичными квадратами. Получается всего 6 квадратов.

4. Чтобы избежать тривиального квадрирования, квадрат со стороной 4 нельзя разбить на четыре квадрата со стороной 2. Один из них придется раздробить на единичные квадраты. Тогда в разбиении будут квадраты уже двух размеров, это допустимо. Порядок равен 7.

5. В квадрате со стороной 5 естественно выделить квадрат со стороной 3, затем три квадрата со стороной 2 и четыре единичных. Порядок равен 8.

Проиллюстрируем описанный процесс.



Связь длины стороны исходного квадрата с порядком его оптимального квадрирования определяется следующей таблицей:

|                     |   |   |   |   |   |      |      |
|---------------------|---|---|---|---|---|------|------|
| сторона квадрата    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6, 7 | 8, 9 |
| оптимальный порядок | 1 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9    | 10   |

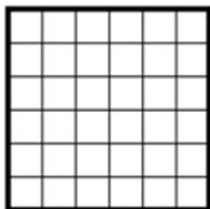
|                     |       |       |       |       |           |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| сторона квадрата    | 10-13 | 14-17 | 18-23 | 24-29 | 30-39, 41 |
| оптимальный порядок | 11    | 12    | 13    | 14    | 15        |

|                     |           |       |       |        |
|---------------------|-----------|-------|-------|--------|
| сторона квадрата    | 40, 42-53 | 54-70 | 71-91 | 92-120 |
| оптимальный порядок | 16        | 17    | 18    | 19     |

Эта таблица – результат огромного количества человеческих и компьютерных часов практической работы.

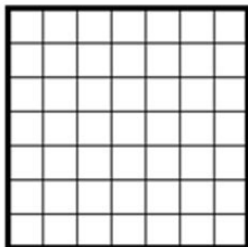
Теперь, зная порядок оптимального квадрирования, можете попробовать свои силы в разбиении квадратов со сторонами от 6 до 21 (пропуская рассмотренную сторону 13). Избегайте тривиального квадрирования, когда все квадраты только одного размера. Учитывайте, что не всегда оптимальное квадрирование имеет единственное возможное решение. Ориентиром оптимальности служит порядок, указанный в таблице. Первые 15 задач – это «одеяла миссис Перкинс» разных размеров.

**К-1**



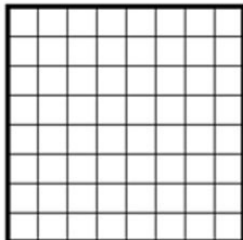
Требуется разделить квадрат  $6 \times 6$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.

**К-2**



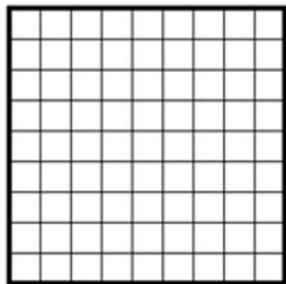
Требуется разделить квадрат  $7 \times 7$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.

**К-3**



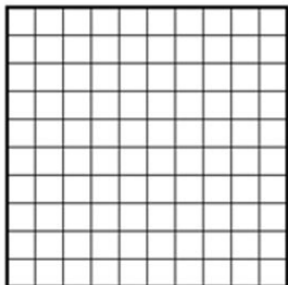
Требуется разделить квадрат  $8 \times 8$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.





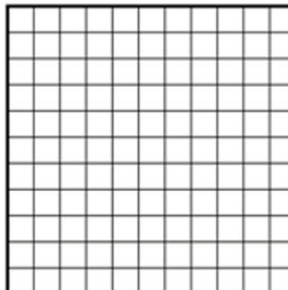
**К-4**

Требуется разделить квадрат  $9 \times 9$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.



**К-5**

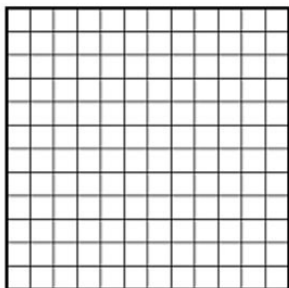
Требуется разделить квадрат  $10 \times 10$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.



**К-6**

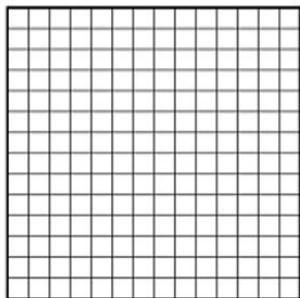
Требуется разделить квадрат  $11 \times 11$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.





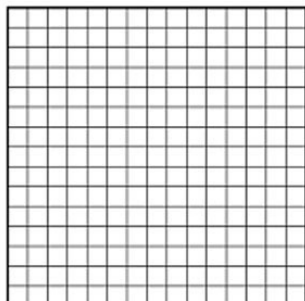
**К-7**

Требуется разделить квадрат  $12 \times 12$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.



**К-8**

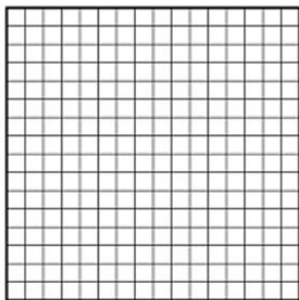
Требуется разделить квадрат  $14 \times 14$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.



**К-9**

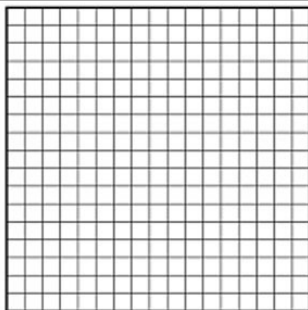
Требуется разделить квадрат  $15 \times 15$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.





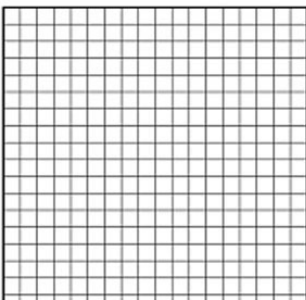
**K-10**

Требуется разделить квадрат  $16 \times 16$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.



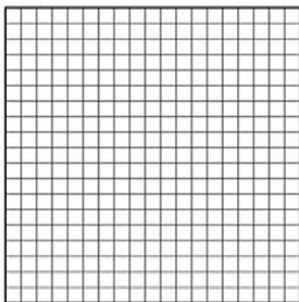
**K-11**

Требуется разделить квадрат  $17 \times 17$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.



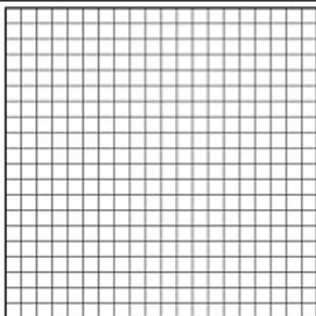
**K-12**

Требуется разделить квадрат  $18 \times 18$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.



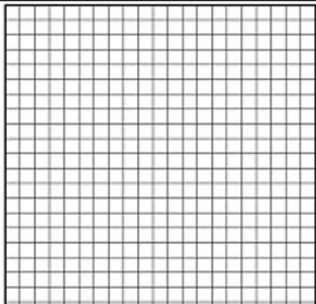
**K-13**

Требуется разделить квадрат  $19 \times 19$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.



**K-14**

Требуется разделить квадрат  $20 \times 20$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.



**K-15**

Требуется разделить квадрат  $21 \times 21$  на квадраты меньшего размера так, чтобы их количество было минимальным.

Задачи могут быть даны в иной формулировке: заданы значения длин сторон маленьких квадратов и их количество, а нужно из них составить один большой квадрат.

# Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.