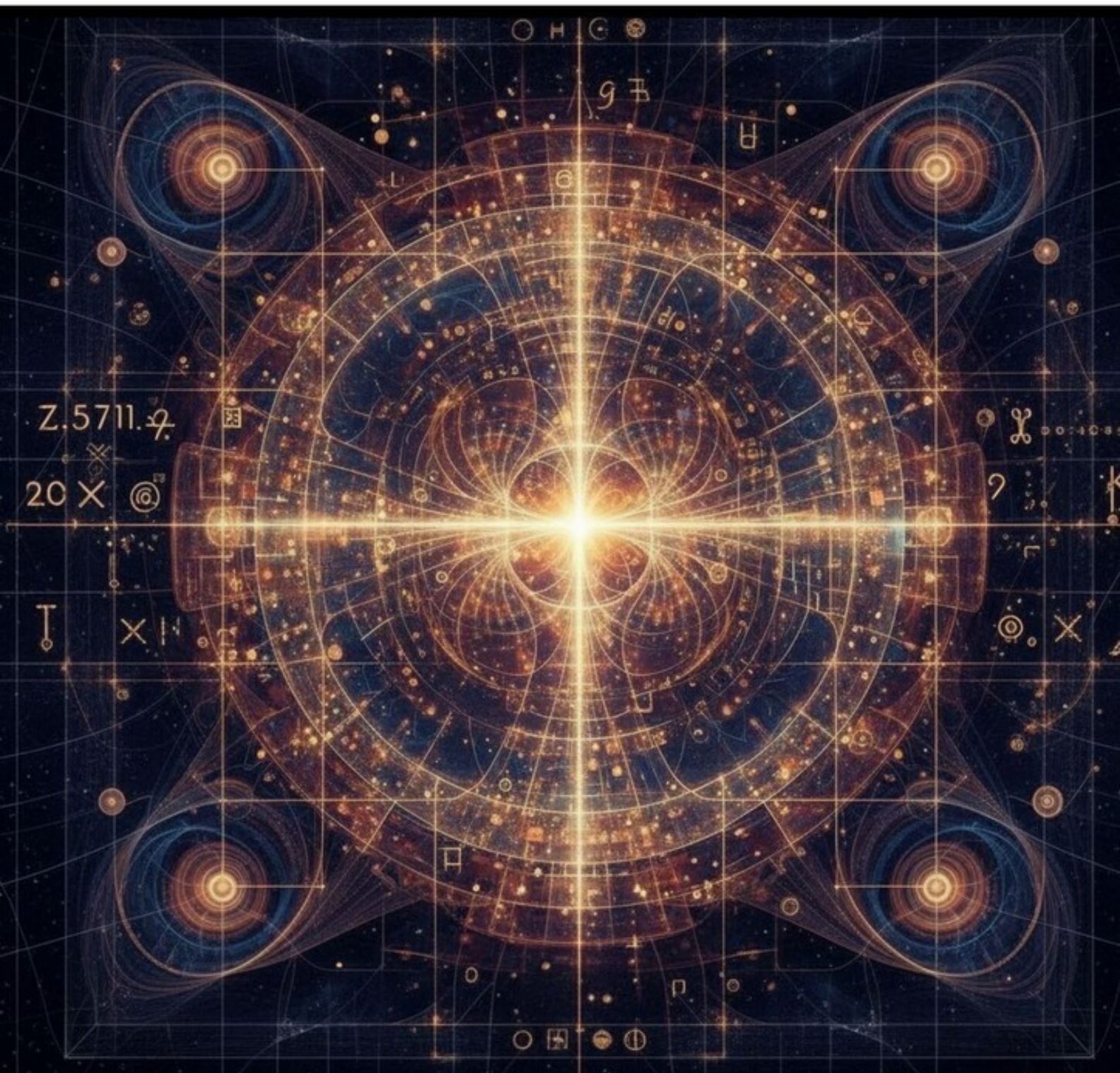


ВИТАЛИЙ ФАРТУШНОВ

**Система Bost–Connes,
категоризация, квантовая
статистическая механика**



Виталий Фартушнов

**Система Bost–Connes,
категоризация, квантовая
статистическая механика**

«Издательские решения»

Фартушнов В.

Система Bost–Connes, категоризация, квантовая статистическая механика / В. Фартушнов — «Издательские решения»,

ISBN 978-5-00-694564-7

Система Bost–Connes представляет собой квантово-статистическую динамическую систему, связанную с алгебраическими числовыми полями, где функция разделения равна дзета-функции Дедекинда поля.

ISBN 978-5-00-694564-7

© Фартушнов В.
© Издательские решения

Содержание

Определение	6
KMS-состояния и фазовый переход	7
Обобщения	8
Определение KMS-условия	9
Функция разделения	10
Структура алгебры и гамильтониан	11
Вывод партиционной функции	12
Свойства	13
Алгебра и К-решётки	14
Гамильтониан и идеалы	15
Партиционная функция	16
Ссылки на вывод	17
Группоид и алгебра	38
Представления, гамильтониан и	41
Конец ознакомительного фрагмента.	85

Система Bost—Connes, категоризация, квантовая статистическая механика

Виталий Фартушнов

© Виталий Фартушнов, 2026

ISBN 978-5-0069-4564-7

Создано в интеллектуальной издательской системе Ridero

Система Bost—Connes – описать подробно с формулами, дать ссылки на статьи

Система Bost—Connes представляет собой квантово-статистическую динамическую систему, связанную с алгебраическими числовыми полями, где функция разделения равна дзета-функции Дедекинда поля. ^[1] ^[2]

Определение

Система Bost—Connes – это C^* -динамическая система вида $A_K = C^*(\mathbb{Q} / \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{N}$, оснащённая одним параметрическим потоком автоморфизмов σ_t , где действие определяется нормой идеалов.^[3]^[2] Для рационального поля $\mathbb{Q}$ поток задаётся как $\sigma_t(u_n) = n^{it} u_n$, где u_n – проекторы, соответствующие классам в $\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Z}$.^[1]^[4] Функция разделения системы совпадает с функцией Римана $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.^[3]

KMS-состояния и фазовый переход

KMS- β -состояния (Kubo-Martin-Schwinger) определяют равновесные состояния при обратной температуре β . Для $\beta > 1$ существует уникальное KMS- β -состояние; для $0 < \beta \leq 1$ пространство экстремальных KMS- β -состояний образует симплекс, индексированный галауа-группой или классами идеалов.^{[2] [4]} Абсолютная галауа-группа действует на состояниях при $T=0$, реализуя теорию классовых полей.^[1]

Обобщения

Коннес, Марколли и Рамачандран расширили конструкцию на мнимо-квадратичные поля.^[1] Существуют аналоги для функциональных полей и числовых полей с использованием Drinfeld-модулей или периодических векторов Витта.^{[5] [6]}

Ключевые статьи

– Bost J.-B., Connes A. Hecke algebras, type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking // Selecta Math. (N.S.). 1995. Vol. 1, №3. P. 411—457. ArXiv: math/9507002^[1].

– Connes A., Marcolli M., Ramachandran K. Bost-Connes systems for Shimura varieties // Selecta Math. (N.S.). 2008. Vol. 14. P. 179—229. ArXiv: math/0603773^[1].

– На Е., Paugam F. Bost-Connes systems for Shimura varieties. II. The complex case // Adv. Math. 2010. Vol. 224, №4. P. 1621—1655^[7].

—



Формулы KMS-состояний в системе Bost—Connes

KMS-состояния (Kubo-Martin-Schwinger) в системе Bost—Connes определяют равновесные состояния при инверсной температуре $\beta > 0$, с фазовым переходом при $\beta = 1$.^{[16] [17]}

Определение KMS-условия

Состояние ϕ на C^* -алгебре A с потоком автоморфизмов σ_t удовлетворяет KMS_β -условию, если для любых $x, y \in A$ существует голоморфная функция $F_{x,y}(z)$ на полосе $0 < \text{Im}(z) < \beta$, непрерывно продолжающаяся на границу, такая что:

$$F_{x,y}(t) = \phi(x\sigma_t(y)), F_{x,y}(t + i\beta) = \phi(\sigma_t(y)x), \forall t \in \mathbb{R}.$$

[16] [18]

KMS-состояния в Bost-Connes

В системе $(A_{\mathbb{Q}}, \sigma_t)$, где $A_{\mathbb{Q}} = C^*(\mathbb{Q}) / \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{N}$ и $\sigma_t(u_n) = n^{it} u_n$ (с u_n – проекторами на классы $1/n \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$), структура KMS-состояний следующая: ^[17]

– Для $\beta > 1$: множество KMS_β -состояний – синглетон (уникальное состояние трассы).

– Для $0 < \beta \leq 1$: экстремальные KMS_β -состояния индексированы $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{ab}} / \mathbb{Q})$, с действием галауа-группы.

Экстремальное состояние ϕ_u (для $u \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times$) задаётся:

$$\phi_u(a) = \frac{1}{Z_\beta} \text{Tr}(\pi_u(a) e^{-\beta H}),$$

где H – гамильтониан с $e^{-\beta H} e_n = n^{-\beta} e_n$, $Z_\beta = \zeta(\beta)$, а π_u – представление. ^{[17] [16]}

Функция разделения

Функция разделения $Z_{\beta} = \mathrm{Tr} (e^{-\beta H}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \zeta(\beta)$, совпадающая с дзета-функцией Римана.^{[19] [17]} При $T=0$ ($\beta = \infty$) KMS-состояния – слабые пределы KMS $_{\beta}$ при $\beta \rightarrow \infty$.^[16]



Как вывести формулу партиционной функции $\zeta(\beta)$ для KMS-состояний

Партиционная функция $Z(\beta)$ в системе Bost–Connes выводится из следа гамильтониана на ортонормированном базисе проекторов, приводя к ряду Римана $\zeta(\beta)$.^{[31] [32]}

Структура алгебры и гамильтониан

C^* -алгебра $A_{\mathbb{Q}}$ порождена проекторами u_n ($n \geq 1$), где $u_n u_m = \delta_{n,m} u_n$, $\sum_n u_n = 1$, и частичными изометриями $s_{m,n}$ с $s_{m,n} s_{n,k}^* = \delta_{n,k} s_{m,k}$, $s_{m,n}^* s_{m,n} = u_n$.^[33] Поток $\sigma_t(u_n) = n^{it} u_n$, $\sigma_t(s_{m,n}) = (m/n)^{it} s_{m,n}$.^[31] Гамильтониан H задан на базисе $\{u_n\}$ как $H u_n = (\log n) u_n$, так что $e^{-\beta H} u_n = n^{-\beta} u_n$.^[32]

Вывод партиционной функции

Партиционная функция KMS-состояния – $Z(\beta) = \mathrm{Tr} (e^{-\beta H})$, где след – сумма по ортонормированному базису проекторов:

$$Z(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(u_n) n^{-\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} = \zeta(\beta).$$

Это следует из полноты базиса $\{\mathrm{id} \otimes u_n\}$ в представлении и инвариантности следа. ^{[31] [32] [34]}

Свойства

Для $\beta > 1$ ряд сходится абсолютно; при $\beta = 1$ – фазовый переход с разрывом симметрии $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{ab}}/\mathbb{Q})$.^[35] В обобщениях на числовые поля $\zeta_K(\beta)$ – дзета Дедекинда.^[36]



Вывод партиционной функции для квадратичных полей в Bost–Connes

Партиционная функция для квадратичных полей в Bost–Connes выводится аналогично рациональному случаю, но через идеалы кольца целых $\mathcal{O}$, с суммой по нормам идеалов, давая дзету Дедекинда $\zeta_K(\beta)$.^[46] ^[47]

Алгебра и К-решётки

Для мнимо-квадратичного поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ с кольцом целых $O = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ ($\tau \in \mathbb{H}$) система строится на группоиде GK эквивалентности комменсурабельности 1-мерных K -решёток (Λ, φ) , где $\Lambda \subset \mathbb{C} - O$ -модуль с $K\Lambda \cong K$, $\varphi: K/O \rightarrow K\Lambda/\Lambda$.^[47] C^* -алгебра $AK = C^*(GK)$ – сверточная алгебра функций на парах комменсурабельных K -решёток, инвариантных под масштабированием C^* .^[47] Поток $\sigma_t(f)(L, L \gg) = |L/L \gg|^{\wedge \{it\}} f(L, L \gg)$, где $|L/L \gg|$ – соотношение ковариол.^[47]

Гамильтониан и идеалы

Для инвертируемой K -решётки $L = (\Lambda, \varphi)$ группоид $(GK)_L$ биективен идеалам $J \subset O$ via $J^\wedge \{-1\} L = (\Lambda^\wedge, \varphi^\wedge)$ с $\Lambda^\wedge = \{x \in \mathbb{C} \mid xJ \subset \Lambda\}$.^[47] Норма идеала $n(J) = \text{covol}(\Lambda^\wedge) / \text{covol}(\Lambda)$, гамильтониан H на ℓ^2 (идеалы) задан $H \varepsilon_J = (\log n(J)) \varepsilon_J$.^[47] Тогда $e^{\wedge \{-\beta H\}} \varepsilon_J = n(J)^\wedge \{-\beta\} \varepsilon_J$.^[47]

Партиционная функция

След $\text{Tr}(e^{-\beta H}) = \sum_{\{J \text{ идеал } O\}} n(J)^{-\beta} = \zeta_K(\beta)$, где $\zeta_K(\beta) = \sum_{\{J\}} n(J)^{-\beta}$ – дзета Дедекинда, поскольку идеалы образуют мультипликативную полугруппу с ортонормированным базисом ε_J .^[47]^[46] KMS_β -состояние для L : $\varphi_{\beta, L}(f) = \zeta_K(\beta)^{-1} \sum_J f(J^{-1} L, J^{-1} L) n(J)^{-\beta}$, $\beta > 1$.^[47]

Ссылки на вывод

Подробный вывод в Connes-Marcolli-Ramachandran (2005): KMS states and complex multiplication, где показана биекция с идеалами и инвариантность под действием адель-классов. ^[46] ^[47] Для функциональных полей аналогия с Drinfeld-модулями даёт $\zeta_{- \{k, \infty\}}(\beta)$. ^[48]

✱✱

Проанализировать статью и описать основные идеи и формулы

Статья строит мост между квантовой статистикой на C^* -алгебрах и явной теорией классов для мнимо-квадратичного поля, обобщая систему Bost–Connes и систему GL на новый «СМ-систему» с партиционной функцией дзета Дедекинда. ^[60]

K

$$\zeta_K(\beta)$$

1. Общая схема и цель

– Конструируется C^* -динамическая система, где A_K – алгебра наблюдаемых, σ_t – временная эволюция (автоморфизмы, задаваемые гамильтонианом). [60]

$$(A_K, \sigma_t)$$

$$A_K$$

$$\sigma_t$$

$$H$$

– При (нулевая температура) экстремальные KMS-состояния («фантастические состояния») кодируют максимальное абелево расширение; действие группы идеаль-классов на состояниях реализует изоморфизм теории классов

$$\beta \rightarrow \infty$$

$$\varphi_{\infty, L}$$

$$K^{ab}$$

$$C_K = I_K/K^*$$

$$\theta: I_K/K^* \rightarrow \text{Gal}(K^{ab}/K). [file: 56]$$

2. KMS-состояния и партиционная функция

KMS-условие

Для C^* -системы состояние – KMS, если для любых существует голоморфная на полосе с

$$(A, \sigma_t)$$

$$\varphi$$

$$x, y \in A$$

$$F_{x,y}(z)$$

$$0 < \Im z < \beta$$

$$F_{x,y}(t) = \varphi(x\sigma_t(y)), F_{x,y}(t + i\beta) = \varphi(\sigma_t(y)x).$$

При KMS-состояние – слабый предел -KMS при. ^[60]

$$\beta = \infty$$

$$\beta$$

$$\beta \rightarrow \infty$$

Партиционная функция

Если реализуется гамильтонианом в представлении, то каноническое KMS-состояние имеет вид

σ_t

H

π

$$\varphi_{\beta}(a) = \frac{\mathrm{Tr}(\pi(a)e^{-\beta H})}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})}, Z(\beta) = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}). [file: 56]$$

– В системе ВС (для)

$$K = \mathbb{Q}$$

$$Z(\beta) = \sum_{n \geq 1} n^{-\beta} = \zeta(\beta). [file: 56]$$

– В GL-системе

$$Z(\beta) = \zeta(\beta) \zeta(\beta - 1). \text{ [file:56]}$$

- В новой СМ-системе для мнимо-квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$
- $Z_K(\beta) = \sum_{\mathfrak{J} \in \mathcal{I}_K} N(\mathfrak{J})^{-\beta} = \zeta_K(\beta). \text{ [file:56]}$

K

3. Q-решётки и BC/GL системы

1-мерные Q-решётки и ВС-система

Q-решётка в: пара, где – решётка,. [file:56]

$\mathbb{R}$

(Λ, φ)

$$\Lambda \subset \mathbb{R}$$

$$\varphi: \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}\Lambda/\Lambda$$

Комменсурируемость:, а совпадают модуль суммы решёток. [file:56]

$$\mathbb{Q}\Lambda_1 = \mathbb{Q}\Lambda_2$$

$$\varphi_1, \varphi_2$$

Пространство классов 1-мерных $\mathbb{Q}$ -решёток с точным масштабированием даёт некоммутативную алгебру

$$A_1 = C(\widehat{\mathbb{Z}}) \rtimes \mathbb{N}^\times, [1]$$

которая и есть алгебра системы Bost—Connes. [file:56]

В естественном представлении, поэтому. [file:56]

$$H\epsilon_n = \log n \epsilon_n$$

$$Z(\beta) = \sum n^{-\beta}$$

2-мерные Q-решётки и GL-система

2-мерная Q-решётка в: с., [file:56]

$$\mathbb{R}^2$$

$$(\Lambda, \varphi)$$

$$\Lambda \subset \mathbb{R}^2$$

$$\varphi: \mathbb{Q}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Q}\Lambda/\Lambda$$

Классы комменсурируемости 2-мерных $\mathbb{Q}$ -решёток up to scale описываются как некоммутативная Шимура-вариетет

\$\$\mathrm{Sh}^{\mathrm{nc}}(\mathrm{GL}_2, H) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash (\mathbb{A}^\times_f \times H) \backslash \mathbb{A}^\times_f\$\$.^[60]

Алгебра координат – Хековская алгебра функций на

$$A_2$$

$$U=\{(g,\alpha,z)\in GL_2^+(\mathbb{Q})\times M_2(\widehat{\mathbb{Z}})\times \mathbb{H}:$$

с свёрткой
\$\$
(f_1*f_2)(g,\alpha,z)=\sum_{\{s\in\Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q}),\,s\alpha\in M_2(\widehat{\mathbb{Z}})\}}f_1(gs^{-1},s\alpha,s(z))f_2(s,\alpha,z).\$[file:56]
Временная эволюция:

$$\sigma_t(f)(g,\alpha,z)=\det(g)^{it}f(g,\alpha,z),H\sim\log\det m.[5]$$

В соответствующем представлении партиционная функция
\$\$

$$\zeta(\beta) = \sum_{m \in \Gamma \backslash M_2^+(\mathbb{Z})} \det(m)^{-\beta} = \zeta(\beta-1). \quad [60]$$

4. К-решётки и СМ-система (главный результат)

Определение К-решётки

Пусть ϕ – мнимо-квадратичное поле, $\mathcal{O}$ – его кольцо целых,. [60]

1-мерная К-решётка: пара, где [60]

K

$\mathcal{O}$

$$K \subset \mathbb{C}$$

$$(\Lambda, \varphi)$$

— — конечнопорождённый $\mathbb{C}$ -модуль s ;

$$\Lambda \subset \mathbb{C}$$

$$0$$

$$\Lambda \otimes_{\mathcal{O}} K \cong K$$

— морфизм $\mathcal{O}$ -модулей. [60]

$$\varphi: K/\mathcal{O} \rightarrow K\Lambda/\Lambda$$

$$\mathcal{O}$$

Комменсурируемость: и. [60]

$$K\Lambda_1 = K\Lambda_2$$

$$\varphi_1 \equiv \varphi_2 \bmod \Lambda_1 + \Lambda_2$$

Классы 1-мерных K-решёток описываются данными с

$$(\rho, s)$$

\$\$
 $\rho \in \widehat{O}, \, s \in A_K^{\ast/K}, \, \text{quad } (\rho, s) \sim (x^{-1} \rho, xs), \, x \in \widehat{O} \, \text{ast}.$
[file:56]
Комменсурируемость классов up to scale даёт множество
\$\$
 $A_{\{K,f\}}^{\ast/K} \cong \widehat{O} / K^{\ast}.$ [60]

Группоид и алгебра

$$A_K$$

Рассматривается группоид комменсулируемых K -решёток (не up to scale), затем деление на масштаб $\mathbb{C}^*$:

$$\tilde{R}_K$$

$\mathbb{C}^*$
 $G_K = \widetilde{R}_K / \mathbb{C}^*$. [file:56]
Алгебра CM-системы:

$$A_K = C^*(G_K), [1]$$

она унитарна, так как пространство единиц компактно и описывается как

$$X = G_K^{(0)}$$

\$\$

$X \simeq \widehat{O} \times_{\widehat{O}^{\text{ast}}} (A_{\{K,f\}} / K^{\text{ast}})$. [60]

Временная эволюция определяется отношением ковариолумов:

\$\$

$|L/L\rangle = \frac{\mathrm{covol}(\Lambda')}{\mathrm{covol}(\Lambda)}, \quad$

$\sigma_t(f)(L, L) = |L/L|^{\mathrm{it} f(L, L)}$. [file:56]

Важный структурный факт: СМ-алгебра морита-эквивалентна более «адельному» перекрёстному произведению

$$A_K$$

\$\$

$$C_0(A_{\{K,f\}/O^{\ast}})\rtimes (K^{O^{\ast}})^{[60]}$$

Представления, гамильтониан и

$$\zeta_K$$

Если Λ – *invertible* K -решётка, то K -решётки, комменсулируемые с Λ , биективно соответствуют идеалам по формуле

$$L = (\Lambda, \varphi)$$

$$L$$

$$J\subset 0$$

$$file:56]$$

$$J^{-1} L = (\Lambda', \varphi), \quad J = \{x \in O \mid x\Lambda' \subset \Lambda\}. \quad [60]$$

В соответствующем представлении на

$$\ell^2(\{\text{идеалы } J\})$$

$$H\epsilon_J = \log N(J) \epsilon_J, [file:56]$$

поэтому партиционная функция

\$\$

$$Z_K(\beta) = \mathrm{Tr} (e^{-\beta H}) = \sum_J N(J) e^{-\beta \log N(J)} = \zeta_K(\beta).$$

[file:56]

KMS-состояния CM-системы (Теорема 5.1)

Для системы справедливо: [file:56]

$$(A_K, \sigma_t)$$

– Для существует единственное KMS-состояние.

$$0 < \beta \leq 1$$

– Для экстремальные KMS-состояния параметризуются инвертируемыми K-решётками (эквивалентно точками):

$$\beta > 1$$

$$A_{\kappa,f}^*/K^*$$

$$E_\beta \simeq A_{\kappa,f}^*/K^*.[\frac{5}{1}]$$

– Явная формула для состояния, ассоциированного инвертируемой решётке :

$$L$$

$$\varphi_{\beta,L}(f) = \zeta_K(\beta)^{-1} \sum_J f(J^{-1}L, J^{-1}L) N(J)^{-\beta}, \beta > 1. [5]$$

– При экстремальные KMS-состояния – пределы этих; они по-прежнему параметризуются. [file:56]

$$\beta \rightarrow \infty$$

$$\varphi_{\beta, L}$$

$$A_{K,f}^*/K^*$$

5. Симметрии и теорема классов

На действует полугруппа финитных идеалей эндоморфизмами; подгруппа – автоморфизмами, а – внутренними эндоморфизмами. [file:56]

Факторизуя по внутренним, получаем действие группы идеаль-классов

$$A_K$$

$$0 \cap A_{\kappa,f}^*$$

$$\theta_s$$

$$\hat{O}^*$$

$$\mathcal{O}^\times$$

$$I_K/K^* \cong A_{K,f}^*/K^* [1]$$

на множестве KMS-состояний; через изоморфизм теории классов

$$\theta: I_K/K^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) [1]$$

это действие соответствует действию Галуа на значениях состояний на арифметической подалгебре. [file:56]

$$A_{K,Q}$$

Если K – инвертируемая K -решётка, то

$$f \in A_{K,Q}$$

$$L$$

$$\varphi_{\infty,L}(f) = f(L, L) \in K^{ab}, [1^5]$$

а для

$$\alpha \in \text{Gal}(K^{ab}/K)$$

$$\alpha(\varphi_{\infty,L}(f)) = \varphi_{\infty,L,S}(f), S = \theta^{-1}(\alpha), [1^5]$$

то есть

$$\alpha \circ \varphi_{\infty,L} = \varphi_{\infty,L,S} \circ \theta^{-1}(\alpha)$$
на $A_{\infty}(K, \mathbb{Q})$. [60]

Это и есть реализация явной теории классов (Hilbert’s 12-й проблематики) в форме «фантастических состояний»: значения экстремальных KMS-состояний на порождают, а действие идель-классов точно совпадает с действием Галуаа. ^[60]

$$A_{K, \mathbb{Q}}$$

$$K^{ab}$$

Если нужна более подробная разборка конкретных разделов (например, только доказательства Теоремы 5.1 или сравнение с системами, ^[61]), уточните – могу разобрать их по шагам с акцентом на вычисления.



Разбери подробно разделы и дай ссылки на литературу

Разделы статьи логично делятся на пять крупных блоков; ниже – структура, основные идеи и ключевые формулы, плюс ориентиры по литературе по каждому блоку. ^[62]

1. Введение (Section 1)

Идея: связать теорию классов полей с квантовой статистикой на C^* -алгебрах (KMS-состояния) и некоммутативной геометрией, продолжая линию системы Bost–Connes (BC) и GL-системы. ^[62]

Главные пункты:

– BC-система: C^* -динамическая система с партиционной функцией, реализующая явную теорию классов для (Kronecker–Weber). ^[62]

$$\zeta(\beta)$$



– GL-система: обобщение BC на 2-мерные -решётки и модульные кривые; KMS-состояния связаны с Галуа теорией *модульного поля*.^[62]



F

– Основной новый объект: СМ-система для мнимо-квадратичного поля, с партиционной функцией дзета Дедекинда, построенная из комменсулируемых K -решёток. ^[62]

K

$$\zeta_K(\beta)$$

– Ключевой тезис: экстремальные KMS-состояния СМ-системы дают генераторы, а действия симметрий соответствуют Галуа-действию по изоморфизму классовых полей. ^[62]

$$K^{ab}$$

Рекомендуемая литература к введению:

- Bost—Connes, *Hecke algebras, type III factors and phase transitions...* Selecta Math. 1 (1995). ^[62]
- Connes—Marcolli, *From physics to number theory via noncommutative geometry. Part I (Q-lattices, GL-system)*. ^[62]

– Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*.^[62]

– [63], [64], [65] – классика по модульным/Шимуровым многообразиям и комплексному умножению (Shimura, Stevenhagen, Weil).^[62]

2. Квантовая статистика и явная теория классов (Section 2)

2.1. Общая KMS-картина

Определяется квантово-статистическая система:^[62]

$$(A, \sigma_\tau)$$

– — унитарная C^* -алгебра (наблюдаемые).

A

– — 1-параметрическая группа автоморфизмов (временная эволюция).

σ_t

– Состояние:, положительное,.^[62]

φ

$$\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi(1) = 1$$

KMS-условие при :

$$\beta > 0$$

$$F_{x,y}(t) = \varphi(x\sigma_t(y)), F_{x,y}(t + i\beta) = \varphi(\sigma_t(y)x) [file: 56]$$

для некоторой ограниченной голоморфной на полосе. ^[62]

$$F_{x,y}$$

$$0 < \Im z < \beta$$

KMS: слабые пределы KMS при. ^[62]

$$\beta \rightarrow \infty$$

2.2. Фазовый переход и симметрии

— : компактный выпуклый симплекс KMS-состояний, экстремальные точки. ^[62]

$$\Sigma_\beta$$

$$E_\beta$$

– Фазовый переход: для $\beta < \beta_c$ – одно состояние, для $\beta > \beta_c$ – нетривиальное множество экстремальных KMS. [62]

$$\beta \leq \beta_c$$

$$\beta > \beta_c$$

– Группа автоморфизмов, коммутирующая с, действует на. Выбор конкретного ϕ может спонтанно ломать симметрию до подгруппы. ^[62]

$$G \subset \text{Aut}(A)$$

$$\sigma_t$$

$$E_\rho$$

$$G_\varphi$$

Действия эндоморфизмов :

$$\rho: A \rightarrow A$$

$$\rho^*(\varphi) = Z^{-1} \varphi \circ \rho, Z = \varphi(e),$$

2.3. Связь с теорией классов (Hilbert 12)

– Для числа поля :

– адели, иделы, идель-классы, связная компонента. ^[62]

$$K$$

$$A_K$$

$$J_K = GL_1(A_K)$$

$$C_K = J_K/K^*$$

$$D_K$$

– Основной изоморфизм теории классов:

$$\theta: I_K/K^*$$

Формулируется «проблема фантастических состояний»:
Найти и рациональную подалгебру так, чтобы: ^[62]

$$(A, \sigma_t)$$

$$A_{\mathbb{Q}} \subset A$$

– действовала как симметрии, совместимые с. ^[62]

$$G = C_K/D_K$$

$$\sigma_t$$

– Для :

$$\varphi \in E_\infty$$

– лежат в алгебраическом замыкании в;

$$\varphi(a)$$

K

$\mathbb{C}$

– порождают. ^[62]

$\{\varphi(a)\}$

$$K^{ab}$$

– переводит действие на в действие на значениях:

$$\theta$$

$$G$$

$$E_\infty$$

$$\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$$

$$\alpha \circ \varphi = \varphi \circ \theta^{-1}(\alpha). [file: 56]$$

Литература к разделу 2:

- Bratteli—Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics*.^[62]
- , Haag, Haag—Hugenholtz—Winnink – классика по KMS-состояниям.^[62]
- ,^[64] – связь с теорией классов и Hilbert 12.^[62]

3. Q-решётки, BC и GL как некоммутативные Шимура-многообразия (Section 3)

3.1. Q-решётки и ВС-система (GL)

Определение 3.1. Q-решётка в: пара, где – решётка,. [62]

$$\mathbb{R}^n$$

$$(\Lambda, \varphi)$$

$$\Lambda$$

$$\varphi: \mathbb{Q}^n / \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Q}\Lambda / \Lambda$$

Комменсурируемость: и. ^[62]

$$\mathbb{Q}\Lambda_1 = \mathbb{Q}\Lambda_2$$

$$\varphi_1 \equiv \varphi_2 \bmod (\Lambda_1 + \Lambda_2)$$

Для :

$$n = 1$$

– „ [62]

$$(\Lambda, \varphi) = (\lambda \mathbb{Z}, \lambda \rho)$$

$$\rho \in \text{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \hat{\mathbb{Z}}$$

– Координатная алгебра: действие семигруппы эндоморфизмами

$$C(\hat{\mathbb{Z}})$$

$$\mathbb{N}^\times$$

$$\alpha_n(f)(\rho) = f(n^{-1}\rho),$$

– Алгебра ВС:

$$A_1 = C(\widehat{\mathbb{Z}}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{N}^\times. [file: 56]$$

Эквивалентное описание через адели:

$$GL_1(\mathbb{Q}) \backslash A^*/\mathbb{R}_+^*, A^* = A_f \times \mathbb{R}^*, [file:56]$$

алгебра координат, морита-эквивалентная. [62]

$$C_0(A_f) \rtimes \mathbb{Q}_+^*$$

$$A_1$$

Партиционная функция в каноническом представлении:

$$N^{\epsilon_k} = \log k, \epsilon_k, \quad Z(\beta) = \sum_{k \geq 1} k^{-\beta} = \zeta(\beta).$$
[file:56]
KMS-описание ВС-системы: см. их список свойств (единственность при, параметризация при через, «фантастичность» при). [file:56]

$$0 < \beta \leq 1$$

$$E_\beta$$

$$\beta > 1$$

$$\hat{\mathbb{Z}}^*$$

$$\beta = \infty$$

Базовая литература:

– [62], [63] Bost–Connes. [file:56]

– , – техника кросс-произведений и анализ KMS-состояний. [file:56]

3.2. GL-система

2-мерная Q-решётка:,,. [file:56]

$$(\Lambda, \varphi) = (\lambda(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}z), \lambda\alpha)$$

$$z \in \mathbb{H}$$

$$\alpha \in M_2(\widehat{\mathbb{Z}})$$

Факторизация по и масштабированию даёт

$$SL_2(\mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} & \Gamma \backslash (M_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \times \mathbb{H}), \quad \text{quad} \\ & \Gamma = SL_2(\mathbb{Z}). \end{aligned} \quad [62]$$

Группоид комменсурируемости и его «квота по» дают некоммутативную Шимура-вариетет

$$R_2$$

$$\mathbb{C}^*$$

$$\mathbb{C}^*$$

$\mathrm{Sh}^{\mathrm{nc}}(\mathrm{H}_{\mathrm{pm}}, \mathrm{GL}_2) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash (\mathrm{M}_2(A_f) \times \mathrm{H}^{\mathrm{pm}})$. [file:56]

Хекковская алгебра: функции на

A_2

$f(g,\alpha,z)$

$U = \{(g,\alpha,z) \in GL_2^+(\mathbb{Q}) \times M_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \times \mathbb{H} : g\alpha \in M_2(\widehat{\mathbb{Z}})\}.$

инвариантные относительно, со свёрткой (3.31). [file:56]

$$\Gamma \times \Gamma$$

Временная эволюция:

$$\sigma_t(f)(g,\alpha,z)=\det(g)^{it}f(g,\alpha,z),\,[1]$$

гамильтониан. Партиционная функция:

$$H\sim \log \det m$$

\$\$

$$Z(\beta)=\zeta(\beta)\zeta(\beta-1).\,[62]$$

KMS-структура GL-системы: нет KMS для; для экстремальные KMS параметризуются Шимурой

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.