В. Г. Абдрахманов

Задачи с параметром и нестандартные задачи ЕГЭ 2019, 2020

Пособие для абитуриентов

Валий Габдрауфович Абдрахманов

Задачи с параметром и нестандартные задачи ЕГЭ 2019, 2020. Пособие для абитуриентов

http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=67897452
ISBN 9785005679109

Аннотация

В интернете можно найти решения почти всех задач, встречавшихся на ЕГЭ, но, как правило, они излагаются недостаточно детально. В предлагаемом пособии подробно обсуждаются решения задач повышенной сложности: задач с параметром и нестандартных задач из сборников ЕГЭ 2019, 2020. Математика под редакцией И. В. Ященко.Пособие предназначено для абитуриентов, но может быть полезным и для учителей математики.

Содержание

Оглавление 522
Конец ознакомительного фрагмента. 523

Задачи с параметром и нестандартные задачи ЕГЭ 2019, 2020 Пособие для абитуриентов

Валий Габдрауфович Абдрахманов

© Валий Габдрауфович Абдрахманов, 2022

ISBN 978-5-0056-7910-9
Создано в интеллектуальной издательской системе Ridero

0. Введение

В пособии разбираются задачи повышенной сложности из сборников *ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. Готовимся к итоговой аттестации. / Под редакцией И.В. Ященко. М.: Интеллект-Центр, 2019* и *ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. Типовые варианты экзаменационных заданий. 50 вариантов. / Под редакцией И.В. Ященко. М.: Экзамен, 2020.* Решения этих задач можно найти в интернете, но там они изложены недостаточно детально, что затрудняет понимание. Нами предпринята попытка более доступного изложения.

Используеемые обозначения: N – множество натуральных чисел, Z – множество целых чисел, $a \vdots b$ – целое число a нацело (то есть без остатка) делится на целое число b.

Приведем сначала вспомогательный материал, который может быть полезным при подготовке к экзамену: универсальный алгоритм извлечения квадратного корня из десятичной дроби, теорему о делении с остатком и метод математической индукции.

Универсальный алгоритм извлечения квадратного корня из десятичной дроби

На ЕГЭ иногда приходится вручную извлекать квадратные корни из довольно больших чисел, так как калькулятором пользоваться не разрешается. Приведем стандартный алгоритм.

1) Влево и вправо от запятой отделяем грани по две цифры. Возможно, что в целой части может оказаться одна цифра, а в дробной – нули.

$$\sqrt{14'15'26{,}44} = 376{,}2$$

$$\begin{array}{r|l} -9 & \\ \hline 515 & 67 \\ -469 & 7 \\ \hline 4626 & 746 \\ -4476 & 6 \\ \hline 15044 & 7522 \\ -15044 & 2 \end{array}$$

Рис. 0.1

2) Извлекать начинаем слева направо: подбираем наибольшую цифру, квадрат которой не больше числа, стоящего в первой грани. Это будет первая цифра результата (цифра 3 на рис. 0.1). Возводим ее в квадрат и записываем под числом, стоящим в первой грани.

3) Вычисляем разность между числом в первой грани и квадратом подобранной первой цифры (число 5 на рис. 0.1).

4) К этой разности сносим следующую грань. Полученное число будет делимым (число 515 на рис. 0.1). Образовываем делитель для деления углом. Для этого первую цифру результата удваиваем (умножаем на 2), получаем число десятков делителя (число 6 на рис. 0.1), а в качестве числа единиц подбираем такую максимальную цифру, чтобы ее произведение на весь делитель не превосходило делимого (на рис. 0.1 эта цифра равна 7, так как $7 \cdot 67 = 469 \leq 515$, поэтому делитель получился равным 67). Подобранную цифру (этой цифрой может оказаться и 0) записываем в ответ второй цифрой.

5) Вычисляем разность между делимым и произведением делителя на число его единиц (на рис. 0.1 это разность

515–469=46).

6) К этой разности сносим следующую грань и выполняем действия далее по тому же алгоритму. Если сносимая грань окажется гранью дробной части, то в ответе ставим запятую.

Данный способ позволяет извлекать корень с любой точностью (на рис.0.2 с точностью до тысячных),

$$\sqrt{5} = \sqrt{5{,}00'00'00} = 2{,}236$$

$$\begin{array}{r|l} -4 & \\ \hline 100 & 42 \\ -84 & 2 \\ \hline 1600 & 443 \\ -1329 & 3 \\ \hline 27100 & 4466 \\ -26796 & 6 \end{array}$$

Рис. 0.2

Теорема о делении с остатком

Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых числа q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$.

Примеры.

$a = 725,\ b = 25.\quad 725 = 25 \cdot 29 + 0.\ q = 29,\ r = 0.$

$a = 725,\ b = 23.\quad 725 = 23 \cdot 31 + 12.\ q = 31,\ r = 12.$

$a = 23,\quad b = 725.\ \ 23 = 725 \cdot 0 + 23.\quad q = 0,\quad r = 23.$

$a = 23,\ \ b = 23.\ \ 23 = 23 \cdot 1 + 0.\quad q = 1,\quad r = 0.$

$a = -725,\ b = 25. - 725 = 25 \cdot (-29) + 0.\ q = -29,\ r = 0.$

$a = -725,\ b = 23.\quad -725 = 23 \cdot (-32) + 11.\ q = -32,\ r = 11.$

(Остаток не должен быть отрицательным и по модулю должен быть меньше делителя, поэтому $725 = 23 \cdot 31 + 12 \Rightarrow$
$-725 = 23 \cdot (-31) - 12 = 23 \cdot (-32 + 1) - 12 = 23 \cdot (-32) + 11$).

$a = -725,\ b = -23.\quad -725 = -23 \cdot 32 + 11.\ q = 32,\ r = 11.$

$(725 = 23 \cdot 31 + 12 \Rightarrow$
$-725 = -23 \cdot 31 - 12 = -23 \cdot (32 - 1) - 12 = -23 \cdot 32 + 11).$

$a = 725,\ b = -23.\quad 725 = -23 \cdot (-31) + 12.\ q = -31,\ r = 12.$

$(725 = 23 \cdot 31 + 12 \Rightarrow 725 = -23 \cdot (-31) + 12).$

$a = 23,\quad b = -725.\ \ 23 = -725 \cdot 0 + 23.\quad q = 0,\quad r = 23.$

$a = -23,\quad b = 725.\ -23 = 725 \cdot (-1) + 702.\quad q = -1,\quad r = 702.$

$(-23 = 725 \cdot 0 - 23 \Rightarrow$
$-23 = 725 \cdot (-1 + 1) - 23 = 725 \cdot (-1) + 702)$
$a = -23,\ b = -725.\ -23 = -725 \cdot 1 + 702.\quad q = 1,\quad r = 702.$

Метод математической индукции

Принцип математической индукции

Пусть имеется некоторое утверждение $A(n)$, зависящее от натурального числа n. Если это утверждение истинно при $n = m$ и для любого натурального $k \geq m$ из его истинности при $n = k$ следует истинность и при $n = k + 1$, то утверждение истинно для всех натуральных $n \geq m$.

Метод математической индукции

Методом математической индукции называется способ доказательства математических утверждений с помощью принципа математической индукции. Этот способ состоит в следующем:

1. Проверяется истинность утверждения $A(n)$ при $n = m$ – *база индукции.*

2. Для любого натурального числа $k \geq m$ допускается, что утверждение $A(n)$ истинно при $n = k$, и доказывается, что тогда утверждение истинно и при $n = k + 1$ – *шаг индукции.*

Если обе части доказательства проведены, то на основании принципа математической индукции делается вывод, что утверждение истинно для всех натуральных $n \geq m$. В самом деле, если утверждение истинно при $n = m$, то по доказанному в шаге 2 оно истинно и при $n = m + 1$. Далее, из того, что оно истинно при $n = m + 1$ вытекает его истинность при $n = (m + 1) + 1 = m + 2$. Затем от $n = m + 2$ переходим к $n = m + 3$ и т.д. Ясно, что при этом рано или

поздно мы доберемся до любого натурального числа n, а потому данное утверждение истинно для всех $n \geq m$.

Наиболее часто базой индукции является проверка истинности $A(1)$, то есть доказывается истинность $A(n)$ при всех $n \in N$. В этих случаях $m = 1$.

Доказательство по индукции можно представить наглядно в виде принципа домино. Пусть костяшки домино выставлены в ряд таким образом, что каждая косточка, падая, обязательно опрокидывает следующую за ней косточку (в этом заключается шаг индукции). Тогда, если мы толкнём $m-$ю косточку (это база индукции), то все следующие косточки в ряду упадут.

Пример 1. Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 6$, $a_{n+1} = 2a_n - 3n + 2$. Доказать, что $a_n = 2^n + 3n + 1$

(у рекуррентной (возвратной) последовательности каждый следующий член, начиная с некоторого, выражается по определенному правилу через предыдущие).

Доказательство.

1) проверяем формулу при $n = 1$: $a_1 = 2^1 + 3 \cdot 1 + 1 = 6$ – она верна (*база индукции*);

2) допускаем, что формула верна при $n = k$: верна формула $a_k = 2^k + 3k + 1$, и доказываем, что формула верна при $n = k + 1$: $a_{k+1} = 2^{k+1} + 3(k + 1) + 1$. Распишем $k + 1-$й член последовательности по рекуррентной формуле $a_{k+1} = 2a_k - 3k + 2$ и подставим значение a_k по формуле, верной по допущению, затем преобразуем:

$a_{k+1} = 2(2^k + 3k + 1) - 3k + 2 = 2^{k+1} + 3k + 4 = 2^{k+1} + 3(k + 1) + 1.$

Видим, что формула верна при $n = k + 1$ (*шаг индукции*).

Условия принципа математической индукции выполнены, следовательно, формула верна для всех натуральных n.

Пример 2. Найти все $n \in N$, для которых истинно неравенство $3^n \geq 2(n + 1)^2$.

Решение.

1) При $n = 1, 2, 3$ неравенство не выполняется. Оно выполняется при $n = 4$ (*база индукции*).

2) Для любого $k \geq 4$ допускаем, что неравенство верно при

$n = k$: $3^k \geq 2(k+1)^2$, и доказываем, что оно верно для $n = k+1$:

$$3^{k+1} \geq 2(k+2)^2.$$

Имеем $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \geq 3(2(k+1)^2) = 2(3(k+1)^2)$.

Здесь $3(k+1)^2 = 3(k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+2)^2 = 3k^2 + 6k + 3 - k^2 - 4k - 4 + (k+2)^2 = 2k^2 + 2k - 1 + (k+2)^2 \geq 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 1 + (k+2)^2 = 39 + (k+2)^2 > (k+2)^2$.

Доказано, что $3^{k+1} \geq 2(k+2)^2$ (*шаг индукции*).

Условия принципа математической индукции выполнены, следовательно, неравенство верно для всех натуральных $n \geq 4$.

Ответ: $n \geq 4$.

Принцип полной математической индукции

Существует еще одна форма принципа – принцип полной математической индукции.

Если утверждение $A(n)$, в котором $n \in N$, истинно при $n = m$ и для любого натурального $k \geq m$ из его истинности при всех $n < k$ следует истинность и при $n = k$, то утверждение $A(n)$ истинно для всех натуральных $n \geq m$.

Эта форма используется, когда для проверки истинности утверждения при $n = k+1$ информация об истинности при $n = k$ недостаточна: нужна информация об истинности утверждения при некоторых меньших значениях n.

Пример 3. На сколько треугольников $n-$ угольник (необязательно выпуклый) может быть разбит своими непересекающимися диагоналями?

Решение. Для треугольника это число равно единице (в нем нет диагоналей, и после попытки разбить его с помощью диагоналей остается в неприкосновенности сам треугольник): $1 = 3 - 2$; для четырехугольника (рис. 0.3) это число равно, как видим, двум: $2 = 4 - 2$. Для любого $k \geq 3$ допустим, что каждый $n-$ угольник, где



Рис. 0.3

$n < k$, разбивается непересекающимися диагоналями на $n - 2$ треугольника (независимо от способа разбиения).

Рассмотрим произвольный $n-$угольник при $n = k$ (рис. 0.4). Пусть этот $k-$угольник каким-либо способом разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Подсчитаем число этих треугольников. Пусть A_1A_p – одна из диагоналей этого разбиения. Она делит $k-$угольник $A_1A_2 \ldots A_k$ на $p-$угольник $A_1A_2 \ldots A_p$ и $(k-p+2)-$ угольник $A_p \ldots A_{k-1}A_kA_1$ (две вершины A_1 и A_p принадлежат обоим многоугольникам). Так как $p < k$ и $k - p + 2 < k$, то, по допущению, непересекающимися диагоналями они разбиваются на $p-2$ и $(k-p+2)-2$ треугольника соответственно. Значит, число треугольников в разбиении нашего k –угольника равно $p - 2 + (k - p + 2) - 2 = k - 2$.

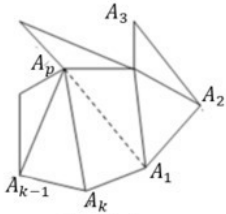


Рис. 0.4

Итак,

1) утверждение $A(n) =$ (Любой $n-$ угольник своими непересекающимися диагоналями может быть разбит на $n-2$ треугольника) истинно при $n = 3$: $A(3)$ истинно (*база индукции*);

2) для любого $k \geq 3$ из допущения, что утверждение $A(n)$ истинно при каждом $n < k$, следует истинность $A(n)$ при $n = k$ (*шаг индукции*).

Условия принципа полной математической индукции выполнены, следовательно, утверждение $A(n)$ верно при любом натуральном $n \geq 3$.

Ответ: $n - 2$ треугольника.

1. Задачи с параметром

1.1. Задачи пункта 5.3 «Уравнения и неравенства с параметром» из сборника И.В.Ященко ЕГЭ 2019

5.3.1

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения

$$x^2 - 15x - 14 + a^2 - 10a = 0$$

принимает наибольшее значение.

Решение.

Дискриминант

$$D = 225 - 4(a^2 - 10a - 14) = -4a^2 + 40a + 281,$$

Корни

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(15 \pm \sqrt{-4a^2 + 40a + 281}\right),$$

искомая величина

$$|x_2 - x_1| = \sqrt{-4a^2 + 40a + 281}.$$

Как известно, квадратный трехчлен $At^2 + Bt + C$ при $A < 0$ принимает наибольшее значение при $t = -\frac{B}{2A}$. У нас $A = -4, B = 40$, значит подкоренное выражение принимает наибольшее значение при $a = -\frac{40}{-8} = 5$. Это значение равно $-4 \cdot 25 + 40 \cdot 5 + 281 = 381$. Поэтому $|x_2 - x_1|$ имеет наибольшее значение $\sqrt{381}$ при $a = 5$ (не было необходимости исследовать знак подкоренного выражения, так как его наибольшее значение оказалось положительным).

Ответ: $a = 5$.

5.3.2

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x - a} = x - 3a$$

имеет корни, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

Решение.

$$\sqrt{3x-a}=x-3a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{a}{3}, \\ x \geq 3a, \\ 3x-a=(x-3a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{a}{3}, \\ x \geq 3a, \\ x^2-(6a+3)x+9a^2+a=0. \end{cases}$$

Учитывая, что дискриминант квадратного трехчлена равен

$$D=(6a+3)^2-4(9a^2+a)=32a+9,$$

запишем равносильную систему

$$\begin{cases} x \geq \frac{a}{3}, \\ x \geq 3a, \\ 32a+9 \geq 0, \\ x=\frac{1}{2}\left(6a+3 \pm \sqrt{32a+9}\right). \end{cases}$$

При $a \geq 0$ система имеет вид

$$\begin{cases} a \geq 0\,, \\ x \geq 3a, \\ a \geq -\frac{9}{32}, \\ x=\frac{1}{2}\left(6a+3 \pm \sqrt{32a+9}\right). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0\,, \\ x \geq 3a, \\ x=\frac{1}{2}\left(6a+3 \pm \sqrt{32a+9}\right). \end{cases}$$

Проверим, удовлетворяют ли корни $x_{1.2}=\frac{1}{2}\left(6a+3 \pm \sqrt{32a+9}\right)$ неравенству $x \geq 3a$.

Если $a=0$, то имеем корни $x_{1.2}=\frac{1}{2}(3 \pm 3)$: $x_1=0,\ x_2=3$. Оба корня удовлетворяют неравенству $x \geq 3a$: $0 \geq 3 \cdot 0,\ 3 \geq 3 \cdot 0$.

Если $a>0$, то $x_1=\frac{1}{2}\left(6a+3-\sqrt{32a+9}\right)<\frac{1}{2}(6a+3-3)=3a$, то есть неравенству $x \geq 3a$ не удовлетворяет.

$x_2=\frac{1}{2}\left(6a+3+\sqrt{32a+9}\right)>\frac{1}{2}\cdot 6a=3a$, то есть удовлетворяет неравенству $x \geq 3a$.

Итак, при $a=0$ имеем два корня $x_1=0,\ x_2=3$, полученные по формуле

$x = \frac{1}{2}\left(6a + 3 \pm \sqrt{32a+9}\right)$, при $a > 0$ имеем один корень $x = \frac{1}{2}\left(6a + 3 + \sqrt{32a+9}\right)$.

При $a < 0$ система имеет вид

$$\begin{cases} a < 0, \\ x \geq \frac{a}{3}, \\ a \geq -\frac{9}{32}, \\ x = \frac{1}{2}\left(6a + 3 \pm \sqrt{32a+9}\right). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{32} \leq a < 0, \\ x \geq \frac{a}{3}, \\ x = \frac{1}{2}\left(6a + 3 \pm \sqrt{32a+9}\right). \end{cases}$$

Проверим выполнение неравенства $x_1 = \frac{1}{2}\left(6a + 3 - \sqrt{32a+9}\right) \geq \frac{a}{3}$. Оно равносильно неравенству $16a + 9 \geq 3\sqrt{32a+9}$. Так как $16a + 9 \geq 16\left(-\frac{9}{32}\right) + 9 = 4{,}5 > 0$, то возведя обе части в квадрат, получим равносильное неравенство

$$16^2a^2 + 2 \cdot 16 \cdot 9a + 81 \geq 9 \cdot 2 \cdot 16a + 81 \Leftrightarrow 16^2a^2 \geq 0$$

– верное неравенство. Корень x_1 удовлетворяет неравенству $x \geq \frac{a}{3}$. Больший корень $x_2 = \frac{1}{2}(6a + 3 + \sqrt{32a+9})$ тем более ему удовлетворяет.

Ответ: При $-\frac{9}{32} \leq a \leq 0$ два корня $x = \frac{1}{2}\left(6a + 3 \pm \sqrt{32a+9}\right)$, при $a > 0$ один корень $x = \frac{1}{2}\left(6a + 3 + \sqrt{32a+9}\right)$.

5.3.3

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x - 3a - 4)^2 + (y - a + 2)^2 = 1, \\ (x - 4a - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9. \end{cases}$$

Решение.

Будем решать графически (рис.1.1). Используем известное уравнение окружности радиуса R с центром $C = (x_0;\ y_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Решениями $(x; y)$ данной системы являются точки пересечения

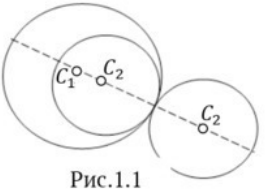


Рис.1.1

окружности радиуса $R_1 = 1$ с центром $C_1 = (3a + 4; a - 2)$ с окружностью радиуса $R_2 = 3$ с центром $C_2 = (4a + 3; -3)$. Единственное решение имеет место в случае внешнего или внутреннего касания этих окружностей. Внешнее касание происходит, когда расстояние между центрами $d(C_1;\ C_2)$ равно сумме радиусов, а внутреннее – когда оно равно разности большего и меньшего радиусов. Учитывая, что $d(C_1;\ C_2) = \sqrt{((4a + 3) - (3a + 4))^2 + (-3 - (a - 2))^2} = \sqrt{2a^2 + 2}$, имеем совокупность уравнений

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2a^2 + 2} = 1 + 3, \\ \sqrt{2a^2 + 2} = 3 - 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2a^2 + 2 = 16, \\ 2a^2 + 2 = 4. \end{bmatrix}$$

Отсюда находим $a = \pm\sqrt{7}$, $a = \pm 1$.

Ответ: $a = \pm\sqrt{7}$, $a = \pm 1$.

5.3.4

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$x^2 - a^2(a + 1)x + a^5 < 0$$

имеет решения и множество решений неравенства содержится в интервале $(-9; 4)$.

Решение.

Как известно, квадратичное неравенство $Ax^2 + Bx + C < 0$ при $A > 0$ имеет решения тогда и только тогда, когда квадратный трехчлен имеет два различных корня. При этом множеством решений является интервал между корнями.

У данного квадратного трехчлена дискриминант

$$D = \left(a^2(a + 1)\right)^2 - 4a^5 = a^4\,(a - 1)^2 > 0$$

при всех значениях $a \neq 0$ и $a \neq 1$, так что при всех $a \neq 0$ и $a \neq 1$ формула $x = \frac{1}{2}\left(a^2(a + 1) \pm \sqrt{a^4\,(a - 1)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(a^2(a + 1) \pm a^2(a - 1)\right)$ дает два различных корня $x = a^2$ и $x = a^3$. Множеством решений данного неравенства является интервал $(a^2;\ a^3)$ при $a > 1$ и интервал $(a^3;\ a^2)$ при $a < 1$.

При $a > 1$ должно быть $(a^2;\ a^3) \subset (-9; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 > -9, \\ a^3 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$a < \sqrt[3]{4}$. Значит, $1 < a < \sqrt[3]{4}$.

При $a < 1$ должно быть $(a^3;\ a^2) \subset (-9;4) \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 > -9, \\ a^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\sqrt[3]{9}, \\ -2 < a < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < a < 2$. Значит, $-2 < a < 1$.

С учетом ограничения $a \neq 0$ имеем $a \in (-2;0) \cup (0;1) \cup (1;\ \sqrt[3]{4})$.

Ответ: $a \in (-2;0) \cup (0;1) \cup (1;\ \sqrt[3]{4})$.

5.3.5

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$9^x - 2(a-3) \cdot 3^x + a^2 - 8a + 7 = 0$$

имеет единственный корень.

Решение.

Положим $3^x = t$. Тогда между множеством корней данного уравнения и множеством положительных корней уравнения $t^2 - 2(a-3)t + a^2 - 8a + 7 = 0$ будет взаимно однозначное соответствие: каждому корню x данного уравнения соответствует один положительный корень $t = 3^x$ квадратного уравнения, а каждому положительному корню t квадратного уравнения соответствует один корень $x = \log_3 t$. Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда квадратное уравнение имеет один положительный корень.

Квадратное уравнение имеет корни, когда дискриминант

$$4(a-3)^2 - 4(a^2 - 8a + 7) = 8(a+1) \geq 0.$$

Если $D = 0$, то есть $a = -1$, то имеем уравнение $t^2 + 8t + 16 = 0$ с единственным отрицательным корнем $t = -4$.

Если $D > 0$, то есть $a > -1$, то имеем два различных корня. Согласно теореме Виета произведение этих корней равно $a^2 - 8a + 7$. Если $a^2 - 8a + 7 = 0$, то $a = 1$ или $a = 7$. При $a = 1$ имеем уравнение $t^2 + 4t = 0$, не имеющее положительного корня. При $a = 7$ получаем уравнение

$t^2 - 8t = 0$ имеющее один положительный корень $t = 8$.

Если $a^2 - 8a + 7 > 0$, то имеем два корня одного знака, это нам не подходит.

Если $a^2 - 8a + 7 < 0$, то два корня разных знаков, и один из них положительный. Неравенство выполняется в интервале между корнями $a = 1$ и $a = 7$ квадратного трехчлена $a^2 - 8a + 7$.

В результате получаем: один положительный корень имеется при $a \in (1; 7]$.

Ответ: $a \in (1; 7]$.

5.3.6

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$$

больше 1.

Решение.

Решаем графически. Условие задачи означает, что все значения функции больше 1, то есть при всех $x \in (-\infty; +\infty)$ имеем неравенство $2ax + |x^2 - 8x + 7| > 1 \Leftrightarrow |x^2 - 8x + 7| > -2ax + 1$. А это означает, что прямая $y = -2ax + 1$ вся лежит ниже графика Г функции $y = |x^2 - 8x + 7|$.

График Г получается из параболы $y = x^2 - 8x + 7$, если ее часть между корнями $x = 1$ и $x = 7$ (лежащую ниже оси абсцисс) зеркально отразить от оси абсцисс. Прямая $y = -2ax + 1$ имеет угловой коэффициент $-2a$ и проходит через

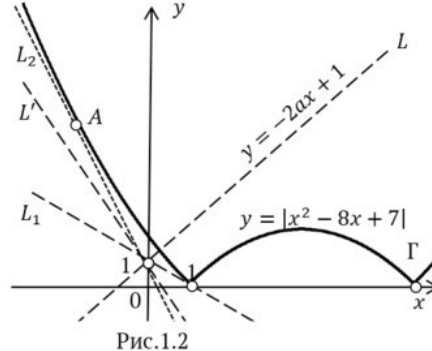


Рис.1.2

точку $(0;1)$. При возрастании значения a от $-\infty$ до $+\infty$ угловой коэффициент прямой убывает от $+\infty$ до $-\infty$. При этом прямая поворачивается вокруг точки $(0;1)$ по часовой стрелке от вертикального положения под углом $\frac{\pi}{2}$ к оси абсцисс до вертикального положения под углом $-\frac{\pi}{2}$. Судя по рис.1.2, если прямую L повернуть по часовой стрелке до положения L_1, когда она пройдет через точку $(1;0)$, то она вся (кроме одной точки $(1;0)$) будет лежать ниже графика Г. Но убедимся в этом аналитически: проверим, что $(1;0)$ – единственная общая точка прямой L_1 с графиком Г. Прямая L_1 наклонена к оси абсцисс под углом $-\frac{\pi}{4}$, поэтому имеет угловой коэффициент $-2a=-1$; ее уравнение $y=-x+1$. Для нахождения общих точек решаем систему

$$\begin{cases} y=-x+1, \\ y=|x^2-8x+7|. \end{cases}$$

При $x\in(-\infty;1)\cup(7;=\infty)$ имеем $\begin{cases} y=-x+1, \\ y=x^2-8x+7 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} y=-x+1, \\ x^2-7x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+1, \\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=6. \end{array}\right. \end{cases}$ В этом случае система несовместна. При $x\in[1;7]$ имеем $\begin{cases} y=-x+1, \\ y=-x^2+8x-7 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} y=-x+1, \\ x^2-9x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+1, \\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=8. \end{array}\right. \end{cases}$ В этом случае одно решение $(1;0)$. Проверено, что прямая L_1 вся (кроме одной точки $(1;0)$) лежит ниже графика Г. При дальнейшем повороте прямой (положение L'), пока не коснется графика Г в точке A (положение L_2), она вся лежит ниже графика Г. После этого прямая будет пересекать график Г.

Итак, прямая $y=-2ax+1$ вся лежит ниже графика Г, когда занимает промежуточные положения L' от L_1 до L_2. Прямая занимает положение L_1 с уравнением $y=-x+1$ при $a=\frac{1}{2}$ $(-2a=-1)$. Осталось найти значение a, при котором прямая занимает положение касательной L_2.

Пусть $A = (x_0;\ y_0)$. Так как $x < 1$, то $y = |x^2 - 8x + 7| = x^2 - 8x + 7$. Угловой коэффициент касательной к графику Г равен $y'(x_0) = 2x_0 - 8$. Он равен угловому коэффициенту $-2a$ прямой L_2: $2x_0 - 8 = -2a$. Отсюда $a = 4 - x_0$. Точка $(x_0;\ y_0)$ лежит и на графике Г, и на прямой L_2, поэтому является решением системы $\begin{cases} y_0 = x_0^2 - 8x_0 + 7, \\ y_0 = -2ax_0 + 1. \end{cases}$ Отсюда получаем уравнение $x_0^2 - 8x_0 + 7 = -2(4 - x_0)x_0 \Leftrightarrow x_0^2 = 6$. Выбираем значение $x_0 = -\sqrt{6} < 1$. Находим, что прямая занимает положение касательной L_2 при $a = 4 - \left(-\sqrt{6}\right) = 4 + \sqrt{6}$.

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{2};\ 4 + \sqrt{6}\right)$.

5.3.7

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 6x$$

имеет хотя бы одну точку максимума.

Решение.

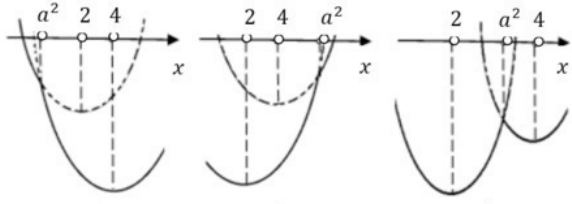
Будем решать графически. Напишем выражение для функции без модуля:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2a^2 - 6x = x^2 - 4x - 2a^2 \text{ при } x < a^2, \\ x^2 - 2x + 2a^2 - 6x = x^2 - 8x + 2a^2 \text{ при } x \geq a^2. \end{cases}$$

График функции состоит из кусков двух парабол. При $x < a^2$ это кусок параболы $y = x^2 - 4x - 2a^2$ с ветвями вверх с вершиной в точке с абсциссой $x = 2$, а при $x \geq a^2$ – кусок параболы $y = x^2 - 8x + 2a^2$ с ветвями вверх с вершиной в точке с абсциссой $x = 4$. Куски парабол стыкуются в точке с абсциссой $x = a^2$.

Все варианты взаимного расположения точек $x = a^2$, $x = 2$ и $x = 4$ показаны на рис.1.3. По рисунку видим, что при $a^2 \leq 2$ и $a^2 \geq 4$ функция не имеет точек максимума. При $2 < a^2 < 4$ имеется одна точка максимума. Из равносильной системы

неравенств $\sqrt{2} < |a| < 2$ получаем, что $a \in (-2;\ -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 2)$.



$a^2 \le 2$ $a^2 \ge 4$ $2 < a^2 < 4$

Рис.1.3

Ответ: $a \in (-2;\ -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 2)$.

5.3.8

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция

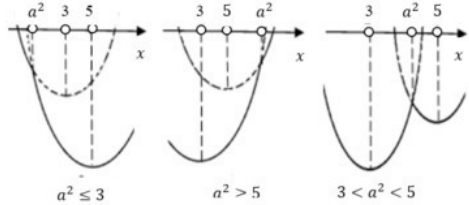
$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$$

имеет более двух точек экстремума.

Решение.

Будем решать графически. Напишем выражение для функции без модуля:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2a^2 - 8x = x^2 - 6x - 2a^2 & \text{при } x < a^2, \\ x^2 - 2x + 2a^2 - 8x = x^2 - 10x + 2a^2 & \text{при } x \ge a^2. \end{cases}$$



$a^2 \le 3$ $a^2 > 5$ $3 < a^2 < 5$

Рис.1.4

График функции состоит из кусков двух парабол. При

$x < a^2$ это кусок параболы $y = x^2 - 6x - 2a^2$ с ветвями вверх с вершиной в точке с абсциссой $x = 3$, при $x \geq a^2$ – кусок параболы $y = x^2 - 10x + 2a^2$ с ветвями вверх с вершиной в точке с абсциссой $x = 5$. Куски парабол стыкуются при $x = a^2$.

Все варианты взаимного расположения точек $x = a^2$, $x = 3$ и $x = 5$ показаны на рис.1.4. По рисунку видим, что при $a^2 \leq 3$ и $a^2 \geq 5$ функция имеет одну точку экстремума – точку минимума. При $3 < a^2 < 5$ имеются три точки экстремума – две точки минимума и одна точка максимума. Из равносильной системы неравенств $\sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}$ получаем, что $a \in (-\sqrt{5}; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{5})$.

Ответ: $a \in (-\sqrt{5}; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{5})$.

5.3.9

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a|x - 3| = \frac{5}{x+2}$$

на промежутке $[0; +\infty)$ имеет ровно два корня.

Решение.

Будем решать графически. Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения графика функции $y = a|x - 3|$ и гиперболы $y = \frac{5}{x+2}$. Требуется найти значения a, при которых имеются ровно две точки пересечения.

График функции $y = a|x - 3| = \begin{cases} -a(x-3) \text{ при } x < 3, \\ a(x-3) \text{ при } x \geq 3 \end{cases}$ состоит из двух лучей с вершиной $(3; 0)$. Правый и левый лучи имеют угловые коэффициенты соответственно a и $-a$. При возрастании a от $-\infty$ до $+\infty$ правый луч поворачивается против часовой стрелки от вертикального положения под углом $-\frac{\pi}{2}$ к оси абсцисс до вертикального положения под углом $\frac{\pi}{2}$. При этом левый луч поворачивается по часовой стрелке, оставаясь симметричным с правым относительно прямой $x = 3$. Гипербола с центром $(-2; 0)$ состоит из двух ветвей, одна из

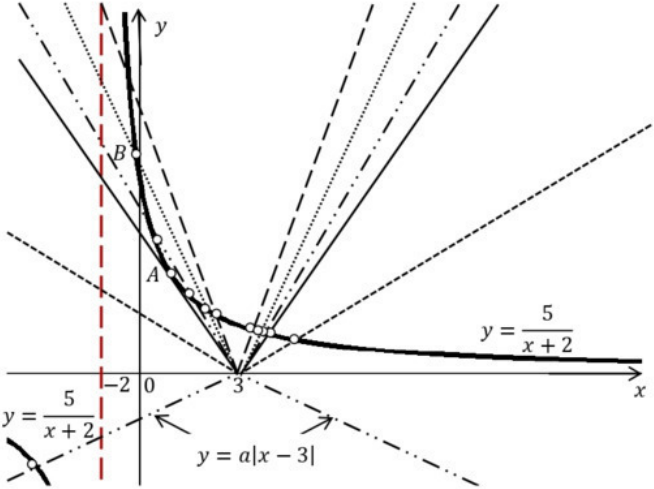


Рис.1.5

которых расположена в угле $x > -2, y > 0$, другая – в угле $x < -2, y < 0$.

Из рис.1.5 (в котором масштабы на осях по необходимости искажены) видим, что при $a \in (-\infty; 0)$ вся «галка» $y = a|x-3|$ расположена ниже оси абсцисс (кроме вершины), левый луч пересекает гиперболу в одной точке, а правый луч не пересекает – на промежутке $[0; +\infty)$ нет корней.

При $a = 0$ галка совпадает с осью абсцисс и не пересекает гиперболу – корней нет.

При $a > 0$ правый луч всегда пересекает гиперболу в одной точке. Когда значение a начинает возрастать от 0, левый луч, «отжавшись» от оси абсцисс, поворачивается по часовой стрелке и при некотором значении a касается гиперболы в точке A. До касания луч не пересекает гиперболу – имеем один корень на промежутке $[0; +\infty)$ (от правого луча).

Если точка касания A окажется правее оси ординат, то левый луч при соответствующем значении a даст один корень, и будем иметь два корня на промежутке $[0; +\infty)$.

Найдем абсциссу x_0 точки касания A и соответствующее значение a. Угловой коэффициент касательной к гиперболе равен значению производной $y'(x_0) = -\frac{5}{(x_0+2)^2}$. С другой стороны, он равен угловому коэффициенту $-a$ левого луча: $-\frac{5}{(x_0+2)^2} = -a$. Отсюда $a = \frac{5}{(x_0+2)^2}$ и, подставив его в равенство $-a(x_0 - 3) = \frac{5}{x_0+2}$, получаем $-\frac{5(x_0-3)}{(x_0+2)^2} = \frac{5}{x_0+2} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$. При этом $a = \frac{5}{(\frac{1}{2}+2)^2} = \frac{4}{5}$.

Видим, что точка A находится правее оси ординат, так что при $a = \frac{4}{5}$ имеем ровно два корня данного уравнения на промежутке $[0; +\infty)$.

При дальнейшем возрастании a от значения $\frac{4}{5}$ левый луч начинает пересекать гиперболу в двух точках правее оси ординат, так что уравнение имеет три корня на промежутке $[0; +\infty)$. Это имеет место до тех пор включительно, пока луч не пройдет через точку B, в которой гипербола пересекает ось ординат. После этого луч пересекает гиперболу в одной точке правее оси ординат, так что при соответствующих значениях a будут два корня уравнения на промежутке $[0; +\infty)$. Найдем, при каком значении a луч проходит через точку B. Точка B имеет координаты $(0; \frac{5}{2})$ и лежит на луче $y = -a(x - 3)$, поэтому $\frac{5}{2} = -a(0 - 3)$. Отсюда получаем $a = \frac{5}{6}$. При $a > \frac{5}{6}$ имеем два корня уравнения на промежутке $[0; +\infty)$.

Ответ: $a \in \left\{\frac{4}{5}\right\} \cup \left(\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

5.3.10

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|2x^2 - 3x - 2| = a - 2x^2 - 8x$$

либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

Решение.

Решаем графически. Запишем уравнение в виде $|2x^2 - 3x - 2| + 2x^2 + 8x = a$. Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения графика Γ_f функции $y = f(x) = |2x^2 - 3x - 2| + 2x^2 + 8x$ с горизонтальной прямой $y = a$. Требуется найти значения a, при которых либо нет пересечений, либо имеется единственное пересечение.

Квадратный трехчлен $2x^2 - 3x - 2$ имеет корни $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 2$, так что

$|2x^2 - 3x - 2| = 2x^2 - 3x - 2$ при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ и $|2x^2 - 3x - 2| = -2x^2 + 3x + 2$ при $x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.

Поэтому $y = f(x) =$

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 + 2x^2 + 8x = 4x^2 + 5x - 2 \text{ при } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty), \\ -2x^2 + 3x + 2 + 2x^2 + 8x = 11x + 2 \text{ при } x \in [-\frac{1}{2}; 2]. \end{cases}$$

График Γ_f состоит из двух кусков параболы $y = 4x^2 + 5x - 2$,

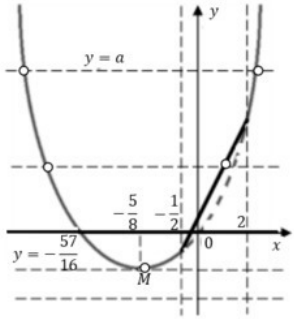


Рис.1.6

расположенных левее прямой $x = -\frac{1}{2}$ и правее прямой $x = 2$, и

куска прямой $y = 11x + 2$ между прямыми $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 2$. Парабола с ветвями вверх имеет вершину $M = (-\frac{5}{8}; -\frac{57}{16})$ (Абсцисса вершины параболы $y = Ax^2 + Bx + C$ вычисляется по формуле $x = -\frac{B}{2A}$. У нас $x = -\frac{5}{2\cdot 4} = -\frac{5}{8}$. Ордината $y = 4(-\frac{5}{8})^2 + 5\left(-\frac{5}{8}\right) - 2 = -\frac{57}{16}$). При $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 2$ куски парабол стыкуются с отрезком прямой
$y = 11x + 2$.

Из рис.1.6 видим, что прямая $y = a$ при $a < -\frac{57}{16}$ не пересекает график Γ_f, при $a = -\frac{57}{16}$ пересекает в одной точке (касается в точке M), при $a > -\frac{57}{16}$ пересекает в двух точках. Следовательно, данное уравнение либо не имеет решений, либо имеет единственное решение при $a \le -\frac{57}{16}$.

Ответ: $a \le -\frac{57}{16}$.

5.3.11

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Будем решать графически. Решениями $(x; y)$ системы являются точки пересечения графика Г первого уравнения с прямой $x + y - a = 0$. Требуется найти значения a, при которых имеются ровно два пересечения. Преобразуем первое уравнение. Разложим скобку на множители, записав ее в виде $y^2 - (x+1)y + (3x - 6)$ и рассматривая как квадратный трехчлен относительно переменной y. По формуле

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}\left(x + 1 \pm \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 12x + 24}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(x + 1 \pm \sqrt{x^2 - 10x + 25}\right) = \frac{1}{2}(x + 1 \pm (x - 5))$$

найдем его корни $x-2$ и 3 и запишем разложение трехчлена на множители: $y^2-xy+3x-y-6=\big(y-(x-2)\big)(y-3)$. Теперь первое уравнение можно записать в равносильном виде

$$\begin{cases} -2\le x<6, \\ \Big[\big(y-(x-2)\big)(y-3)=0, \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x<6, \\ \Big[\begin{array}{l} y=x-2, \\ y=3, \\ x=-2. \end{array} \end{cases}$$

Отсюда видим (рис.1.7), что уравнение имеет составной график Г: это куски прямых $y=x-2$, $y=3$, $x=-2$ в полосе $-2\le x<6$.

Прямая L: $x+y-a=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+y=a$ отсекает отрезки величиной a на обеих осях координат. При возрастании a от $-\infty$ до $+\infty$ она параллельно сдвигается вверх (и вправо). Находясь ниже точки $A=(-2;\,-4)$ и проходя через нее, она

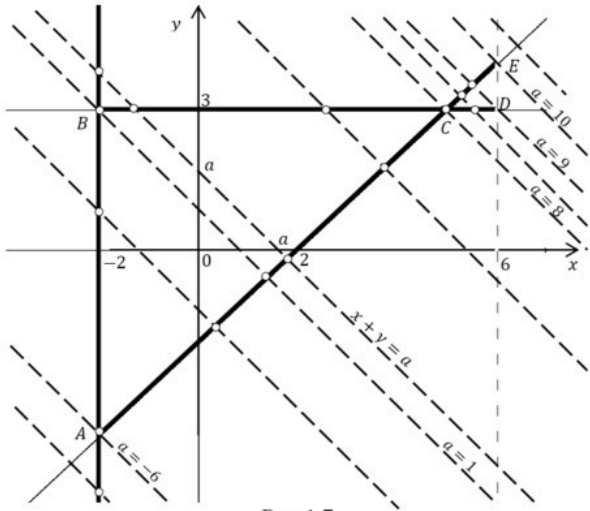


Рис.1.7

пересекает график Г в одной точке (пересекает только прямую

$x = -2$) . Значение a, при котором прямая проходит через точку A, найдем из условия $A \in L$: $-2 + (-4) = a \Rightarrow a = -6$. Далее до точки $B = (-2; 3)$ включительно прямая L пересекает Г в двух точках (пересекает прямые $x = -2$ и $y = x - 2$). Через точку B прямая L проходит при $a = -2 + 3 = 1$. Далее до точки $C = (5; 3)$ имеются три пересечения (со всеми тремя прямыми). Через точку C прямая L проходит при $a = 5 + 3 = 8$. Проходя через точку C, она пересекает график Г в двух различных точках (в точке пересечения с прямой $x = -2$ и в точке пересечения прямых $y = x - 2$, $y = 3$). Далее до точки $D = (6; 3)$ имеются три пересечения (со всеми тремя прямыми). Через точку D прямая L проходит при $a = 6 + 3 = 9$. Проходя через точку D и далее до точки $E = (6; 4)$, она пересекает график Г в двух различных точках (пересекает прямые $x = -2$ и $y = x - 2$). Через точку E прямая L проходит при $a = 6 + 4 = 10$. Проходя через точку E и далее она пересекает Г в одной точке (пересекает прямую $x = -2$).

Видим, что ровно два пересечения имеют место при $-6 < a \leq 1, a = 8, 9 \leq a < 10$.

Ответ: $-6 < a \leq 1, a = 8, 9 \leq a < 10$.

5.3.12

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 7y + 4x + 12)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Будем решать графически. Решениями $(x; y)$ системы являются точки пересечения графика Г первого уравнения с прямой $x + y = a$. Требуется найти значения a, при которых имеется единственное пересечение. Преобразуем первое уравнение. Разложим скобку на множители, записав ее в виде $y^2 - (x + 7)y + (4x + 12)$ и рассматривая как квадратный

трехчлен относительно переменной y. По формуле

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}\left(x + 7 \pm \sqrt{x^2 + 14x + 49 - 16x - 48}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(x + 7 \pm \sqrt{x^2 - 2x + 1}\right) = \frac{1}{2}(x + 7 \pm (x - 1))$$

найдем его корни $x + 3$ и 4 и запишем разложение трехчлена на множители:

$$y^2 - xy - 7y + 4x + 12 = \big(y - (x + 3)\big)(y - 4).$$

Теперь первое уравнение можно записать в равносильном виде

$$\begin{cases} x \geq -4, \\ y < 7, \\ \left[\begin{array}{c} \big(y - (x + 3)\big)(y - 4) = 0, \\ x = -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4, \\ y < 7, \\ \left[\begin{array}{c} y = x + 3, \\ y = 4, \\ x = -4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Отсюда видим (рис.1.8), что уравнение имеет составной график Г: это куски прямых $y = x + 3$, $y = 4$, $x = -4$ в угле $x \geq -4$, $y < 7$.

Прямая L: $x + y = a$ отсекает отрезки величиной a на обеих осях координат. При возрастании a от $-\infty$ до $+\infty$ она параллельно сдвигается вверх (и вправо). Находясь ниже точки $A = (-4; -1)$ и проходя через нее, она пересекает график Г в одной точке (пересекает только прямую $x = -4$). Значение a, при котором прямая проходит через точку A, найдем из

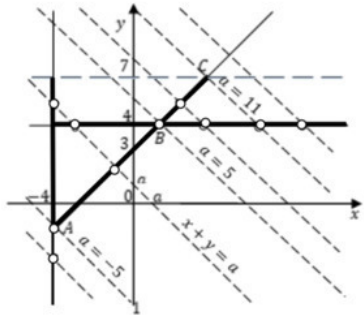


Рис.1.8

условия $A \in L$: $-4+(-1)=a \Rightarrow a=-5$. Далее до точки $B=(1;4)$ прямая L пересекает Γ в двух или трех точках (пересекает две или три прямые из совокупности $y=x+3$, $y=4, x=-4$). Проходя через точку B при $a=1+4=5$, она пересекает Γ в одной точке (в которой пересекаются прямые $y=x+3$ и $y=4$). Далее до точки $C=(4;7)$ имеются два пересечения (с прямыми $y=x+3$ и $y=4$). Проходя через точку C при $a=4+7=11$ и далее прямая L пересекает график Γ в одной точке (пересекает прямую $y=4$).

Видим, что ровно одно пересечение имеет место при $a \le -5, a=5, a \ge 11$.

Ответ: $a \le -5, a=5, a \ge 11$.

5.3.13

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x-2y-2=|x^2+y^2-1|, \\ y=a(x-1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.

Будем решать графически. Решениями $(x;y)$ системы являются точки пересечения графика Γ первого уравнения с прямой L: $y=a(x-1)$. Требуется найти значения a, при которых имеется более двух пересечений.

Первое уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2<1, \\ 2x-2y-2=-x^2-y^2+1, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 \ge 1, \\ 2x-2y-2=x^2+y^2-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2<1, \\ x^2+2x+y^2-2y=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 \ge 1, \\ x^2-2x+y^2+2y=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2<1, \\ x^2+2x+1+y^2-2y+1=3+2, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 \ge 1, \\ x^2-2x+1+y^2+2y+1=-1+2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2<1, \\ (x+1)^2+(y-1)^2=5, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 \ge 1, \\ (x-1)^2+(y+1)^2=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Его график Г (рис.1.9) состоит из куска окружности C_1 радиуса $\sqrt{5}$ с центром $(-1;\ 1)$ внутри окружности C_2 радиуса 1 с центром в начале координат и куска окружности C_3 радиуса 1 с центром $(1;\ -1)$ вне окружности C_2. Все три окружности пересекаются в точках

$$A = (1; 0) \text{ и } B = (0; -1).$$

Прямая L имеет угловой коэффициент a и проходит через точку A. При возрастании значения a от $-\infty$ до $+\infty$ она поворачивается против часовой стрелки от положения под углом $-\frac{\pi}{2}$ к оси абсцисс до положения под углом $\frac{\pi}{2}$.

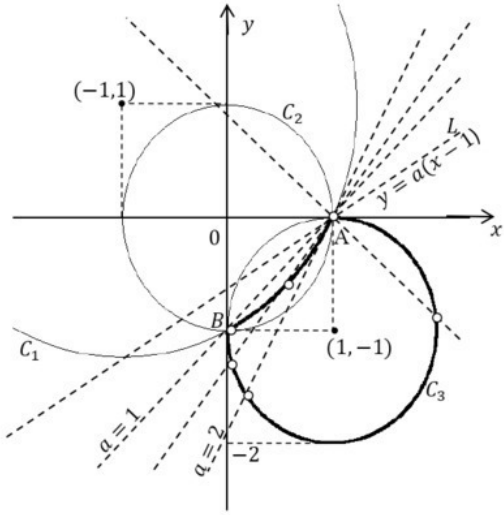


Рис. 1.9

При $-\infty < a < 0$ прямая L пересекает график Г в двух точках (в точке A и в точке правой полуокружности C_3).

При $0 \le a < 1$, когда прямая поворачивается от горизонтального положения ($a = 0$) включительно до

положения AB ($a = tg\,45^0 = 1$) прямая пересекает график Г в одной точке A.

При $a = 1$ в положении AB прямая пересекает график в двух точках A и B.

Поворачиваясь дальше до положения касательной к окружности C_1 в точке A, прямая пересекает Г в трех точках (точка A и еще по одной точке на C_1 и C_3). Найдем значение a, при котором прямая L касается окружности C_1. В точке касания A угловой коэффициент a прямой L должен равняться значению производной $y'(1)$ функции $y = y(x)$, графиком которой служит нижняя полуокружность C_1. Из уравнения $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$ находим $y = 1 \pm \sqrt{5-(x+1)^2}$, и для нижней полуокружности выбираем $y(x) = 1 - \sqrt{5-(x+1)^2}$. Следовательно, $y'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{5-(x+1)^2}}$, $y'(1) = 2$. Значит, $a = y'(1) = 2$.

Делаем вывод: при $1 < a < 2$ имеют место три пересечения. При $2 \le a < +\infty$ прямая L пересекает график Г в двух точках (в точке A и в точке левой полуокружности C_3).

Более двух пересечений (три) получается при $1 < a < 2$.

Ответ: $1 < a < 2$.

5.3.14

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = |x^2 + y^2 - 25|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Решение.

Будем решать графически. Решениями $(x;y)$ системы являются точки пересечения графика Г первого уравнения с прямой L: $x - y = a \Leftrightarrow y = x - a$. Требуется найти значения a, при которых имеется более одного пересечения.

Первое уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{cases} x^2+y^2<25, \\ x^2+20x+y^2-20y+75=-x^2-y^2+25, \end{cases}\right. \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{cases} x^2+y^2\geq 25, \\ x^2+20x+y^2-20y+75=x^2+y^2-25 \end{cases}\right.$$

$$\left[\begin{cases} x^2+y^2<25, \\ x^2+10x+y^2-10y=-25, \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2+y^2<25, \\ x^2+10x+y^2-10y=-25, \end{cases}\right. \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{cases} x^2+y^2\geq 25, \\ x-y=-5 \end{cases}\right. \qquad \left[\begin{cases} x^2+y^2\geq 25, \\ x-y=-5 \end{cases}\right.$$

$$\left[\begin{cases} x^2+y^2<25, \\ x^2+10x+25+y^2-10y=0, \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2+y^2<25, \\ (x+5)^2+(y-5)^2=25, \end{cases}\right.$$
$$\left[\begin{cases} x^2+y^2\geq 25, \\ y=x+5 \end{cases}\right. \qquad \left[\begin{cases} x^2+y^2\geq 25, \\ y=x+5. \end{cases}\right.$$

Его график Г (рис.1.10) состоит из куска окружности C_1 радиуса 5 с центром $(-5;\ 5)$ внутри окружности C_2 радиуса 5 с центром в начале координат и двух кусков прямой $y=x+5$ вне окружности C_2. Обе окружности и прямая $y=x+5$ пересекаются в точках $A=(-5;0)$ и $B=(0;\ 5)$.

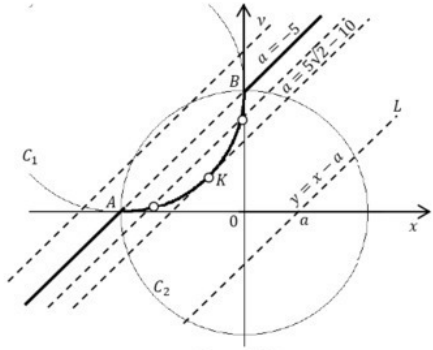


Рис.1.10

Прямая $L: y=x-a$ имеет угловой коэффициент 1 (наклонена к оси абсцисс под углом 45^0, $tg45^0=1$) и проходит через точку $(a;0)$. При возрастании значения a от $-\infty$ до $+\infty$

она параллельно сдвигается вправо.

При $-\infty < a < -5$ прямая L не пересекает график Г.

При $a = -5$ она совпадает с прямой AB: $y = x + 5$, так что имеет с графиком Г бесконечное множество точек пересечения: это куски прямой AB ниже точки A и выше точки B. При дальнейшем возрастании a прямая L до положения касательной к окружности C_1 пересекает Г в двух точках (пересекает C_1). Найдем значение a, при котором происходит касание в точке K, то есть окружность C_1 и прямая L имеют единственную общую точку. Это имеет место, когда система уравнений

$$\begin{cases} (x+5)^2 + (y-5)^2 = 25, \\ y = x - a \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение $(x; y)$. Подставив $y = x - a$ в первое уравнение, получаем квадратное уравнение

$$2x^2 - 2ax + (a+5)^2 = 0.$$

Его дискриминант $D = -4a^2 - 80a - 200$ равен 0 при $a = -10 \pm 5\sqrt{2}$. Выбираем значение, большее -5: это $a = 5\sqrt{2} - 10$. При этом значении квадратное уравнение имеет единственный корень x, а система (1) – единственное решение $(x; y)$. Итак, касание происходит при $a = 5\sqrt{2} - 10$. Значит,

при $-5 < a < 5\sqrt{2} - 10$ прямая L пересекает Г в двух точках,

при $a = 5\sqrt{2} - 10$ имеем одно пересечение (касание),

при $5\sqrt{2} - 10 < a < +\infty$ нет пересечений.

Более одного решения получается при $-5 \le a < 5\sqrt{2} - 10$.

Ответ: $-5 \le a < 5\sqrt{2} - 10$.

5.3.15

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 4y + 15 = 4|2x - y - 10|, \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.

Будем решать графически. Решениями $(x;y)$ системы являются точки пересечения графика Г первого уравнения с прямой L: $x+2y=a \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}(x-a)$. Требуется найти значения a, при которых имеется более двух пересечений.

Первое уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{cases} 2x-y-10<0, \\ x^2-8x+y^2+4y+15=-8x+4y+40, \end{cases} \right. \Leftrightarrow$$
$$\left. \begin{cases} 2x-y-10\geq 0, \\ x^2-8x+y^2+4y+15=8x-4y-40 \end{cases} \right.$$
$$\left[\begin{cases} y>2x-10, \\ x^2+y^2=25, \end{cases} \right. \Leftrightarrow$$
$$\left. \begin{cases} y\leq 2x-10, \\ x^2-16x+y^2+8y=-55 \end{cases} \right.$$
$$\left[\begin{cases} y>2x-10, \\ x^2+y^2=25, \end{cases} \right. \Leftrightarrow$$
$$\left. \begin{cases} y\leq 2x-10, \\ x^2-16x+64+y^2+8y+16=-55+80 \end{cases} \right.$$
$$\left[\begin{cases} y>2x-10, \\ x^2+y^2=25, \end{cases} \right.$$
$$\left. \begin{cases} y\leq 2x-10, \\ (x-8)^2+(y+4)^2=25. \end{cases} \right.$$

Его график Г (рис.1.11) состоит из куска окружности C_1 радиуса 5 с центром в начале координат расположенного выше прямой $y=2x-10$, и куска окружности C_2 радиуса 5 с центром $(8;-4)$, расположенного ниже прямой $y=2x-10$.

Найдем точки пересечения окружностей C_1 и C_2, решив для этого систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ (x-8)^2+(y+4)^2=25. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2-16x+y^2+8y=-55. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $16x-8y=80 \Leftrightarrow y=2x-10$. Это означает, что каждая точка пересечения лежит на прямой $y=2x-10$. Продолжим решать систему: $x^2+(2x-10)^2=25$, отсюда $x=3$ и $x=5$. Соответственно $y=-4$ и $y=0$. Получили точки пересечения $E=(3;-4)$ и

$F = (5;\ 0)$.

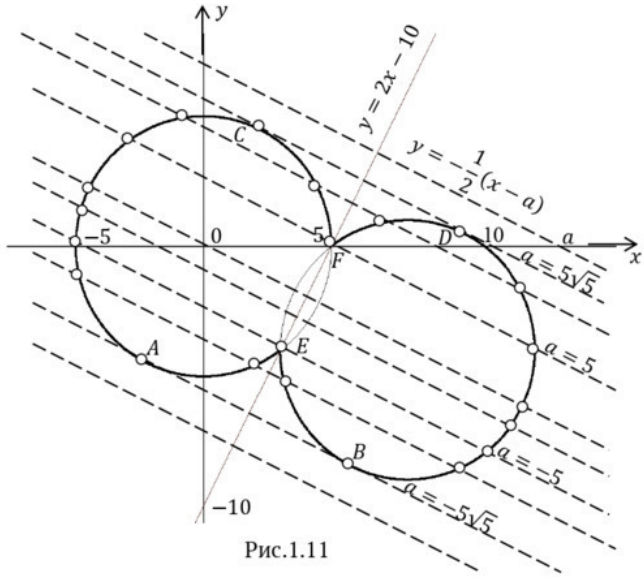


Рис.1.11

Прямая L: $y = -\frac{1}{2}(x - a)$ проходит через точку $(a;\ 0)$. При возрастании значения a от $-\infty$ до $+\infty$ она параллельно сдвигается вправо. При $a = 0$ она проходит через центры обеих окружностей: координаты точек $(0;\ 0)$ и $(8;\ -4)$ удовлетворяют уравнению $y = -\frac{1}{2}x$. А так как радиусы окружностей одинаковы, то прямая L касается обеих окружностей только одновременно – при одних и тех же значениях a. Найдем эти значения. Используем для этого уравнение окружности C_1. Прямая L касается C_1, когда система $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}(x - a), \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ имеет единственное решение. Подставив y во

второе уравнение, получим квадратное уравнение $5x^2 - 2ax + a^2 - 100 = 0$. Его дискриминант $D = -16a^2 + 2000 = 0$ при $a = \pm 5\sqrt{5}$. При этих значениях a квадратное уравнение имеет единственный корень x и потому система имеет единственное решение $(x; y)$. Итак, при $a = -5\sqrt{5}$ прямая L проходит через точки касания A и B, а при $a = 5\sqrt{5}$ через точки касания C и D (координаты точек касания нам не нужны).

Найдем еще значения a, при которых прямая L проходит через точки E и F.

В точке $E = (3; -4)$ имеем равенство $-4 = -\frac{1}{2}(3 - a)$, из которого получаем $a = -5$.

В точке $F = (5; 0)$ очевидно $a = 5$.

Из рисунка видим, что при $a < -5\sqrt{5}$ и $a > 5\sqrt{5}$ прямая L не пересекает график Г, при $a = \pm 5\sqrt{5}$, а также при $-5 < a < 5$ пересекает в двух точках. При все остальных значениях a, то есть при $-5\sqrt{5} < a \le -5$ и $5 \le a < 5\sqrt{5}$ имеются четыре или три пересечения.

Ответ: $-5\sqrt{5} < a \le -5$ и $5 \le a < 5\sqrt{5}$.

5.3.16

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x - 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Будем решать графически. Решениями $(x; y)$ системы являются точки пересечения графика Г первого уравнения с прямой L: $y - 2 = a(x - 5)$. Требуется найти значения a, при которых имеется ровно два пересечения.

Первое уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-5y+5<0, \\ x^2+5x+y^2-y+x-5y+5=52, \end{cases} \\ \begin{cases} x-5y+5\geq 0, \\ x^2+5x+y^2-y-x+5y-5=52 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y>\frac{1}{5}(x+5), \\ x^2+6x+y^2-6y=47, \end{cases} \\ \begin{cases} y\leq\frac{1}{5}(x+5), \\ x^2+4x+y^2+4y=57 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y>\frac{1}{5}(x+5), \\ x^2+6x+9+y^2-6y+9=47+18, \end{cases} \\ \begin{cases} y\leq\frac{1}{5}(x+5), \\ x^2+4x+4+y^2+4y+4=57+8 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y>\frac{1}{5}(x+5), \\ (x+3)^2+(y-3)^2=65, \end{cases} \\ \begin{cases} y\leq\frac{1}{5}(x+5), \\ (x+2)^2+(y+2)^2=65. \end{cases}\end{array}\right.$$

Его график Г (рис.1.12) состоит из куска окружности C_1 радиуса $\sqrt{65}$ с центром $(-3;\ 3)$, расположенного выше прямой $y=\frac{1}{5}(x+5)$, и куска окружности C_2 радиуса $\sqrt{65}$ с центром $(-2;\ -2)$, расположенного ниже прямой $y=\frac{1}{5}(x+5)$. Найдем точки пересечения окружностей C_1 и C_2, решив для этого систему $\begin{cases}(x+3)^2+(y-3)^2=65 \\ (x+2)^2+(y+2)^2=65\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+6x+y^2-6y=47, \\ x^2+4x+y^2+4y=57\end{cases}$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $2x-10y=-10 \Leftrightarrow y=\frac{1}{5}(x+5)$. Это означает, что каждая точка пересечения лежит на прямой $y=\frac{1}{5}(x+5)$. Продолжим решать систему: $x^2+6x+\frac{1}{25}(x+5)^2-\frac{6}{5}(x+5)=47$, отсюда $x=-10$ и $x=5$. Соответственно $y=-1$ и $y=2$. Получили точки пересечения $A=(-10;\ -1)$ и $B=(5;\ 2)$.

Прямая L: $y-2=a(x-5)$ с угловым коэффициентом a проходит через точку $(5;\ 2)$. При возрастании значения a от $-\infty$ до $+\infty$ она поворачивается против часовой стрелки вокруг точки $(5;\ 2)$ от положения под углом $-\frac{\pi}{2}$ к оси абсцисс до положения под углом $\frac{\pi}{2}$. Во всех своих положениях от

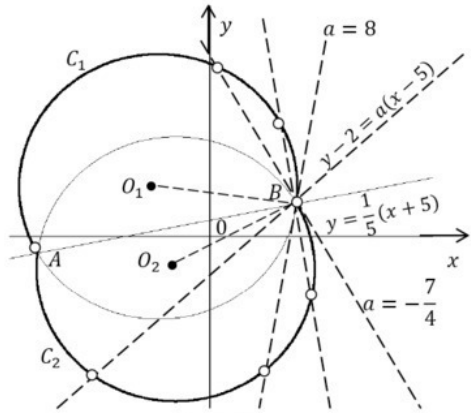


Рис.1.12

положения касательной к нижней окружности C_2 до положения касательной к верхней окружности C_1 она пересекает график Г в двух точках, а во всех остальных положениях – в трех точках.

Найдем значения a, при которых происходят касания окружностей. Касательная к окружности C_2 в точке B перпендикулярна к радиусу O_2B, поэтому угловой коэффициент a касательной $y - 2 = a(x - 5)$ по условию перпендикулярности равен $-\frac{1}{k}$, где k – угловой коэффициент прямой O_2B (условием перпендикулярности прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 является равенство $k_1 \cdot k_2 = -1$). Пусть прямая O_2B имеет уравнение $y = kx + b$. Подставив в него координаты точек $O_2 = (-2; -2)$ и $B = (5; 2)$, получаем систему $\begin{cases} -2 = -2k + b, \\ 2 = 5k + b, \end{cases}$ из которой находим $k = \frac{4}{7}$. Значит, $a = -\frac{7}{4}$, так что прямая L: $y - 2 = a(x - 5)$ касается нижней окружности C_2 при $a = -\frac{7}{4}$.

Аналогично для окружности C_1 с центром $O_1 = (-3; 3)$ из

системы $\begin{cases} 3 = -3k + b, \\ 2 = 5k + b \end{cases}$ находим угловой коэффициент $k = -\frac{1}{8}$ прямой O_1B. Значит, $a = 8$, так что прямая L: $y - 2 = a(x - 5)$ касается верхней окружности C_1 при $a = 8$.

Итак, прямая L пересекает график Г ровно в двух точках при $-\frac{7}{4} \le a \le 8$.

Ответ: $-\frac{7}{4} \le a \le 8$.

5.3.17

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.

Будем решать графически. Решениями $(x; y)$ системы являются точки пересечения графика Г первого уравнения с прямой L: $x - y = a \Leftrightarrow y = x - a$. Требуется найти значения a, при которых имеется более двух пересечений.

Квадратный трехчлен $x^2 - x - 2$ имеет корни $x = -1$ и $x = 2$, так что $x^2 - x - 2 < 0$ при $-1 < x < 2$ и $x^2 - x - 2 \ge 0$ при $x \le -1$ и $x \ge 2$. Поэтому первое уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 2, \\ y^2 - x - 2 = -x^2 + x + 2, \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge 2, \end{array}\right. \\ y^2 - x - 2 = x^2 - x - 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 2, \\ x^2 - 2x + y^2 = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge 2, \end{array}\right. \\ y^2 = x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 2, \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4 + 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge 2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = -x, \\ y = x \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 2, \\ (x - 1)^2 + y^2 = 5, \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge 2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = -x, \\ y = x. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Его график Г (рис.1.13) состоит из двух кусков окружности радиуса $\sqrt{5}$ с центром $(1; 0)$, расположенных в полосе

$-1 < x < 2$, и кусков прямых $y = -x$ и $y = x$, расположенных в полуплоскостях $x \le -1$ и $x \ge 2$. Прямая $x = -1$ пересекает окружность в точках $A = (-1;1)$ и $B = (-1;-1)$, а прямая $x = 2-$ в точках $C = (2;2)$ и $D = (2;-2)$. Прямая $y = -x$ проходит через точки A и D, а прямая $y = x -$ через точки B и С. Прямая L: $y = x - a$ параллельна прямой $y = x$ и проходит через точку $(a;0)$. При возрастании значения a от $-\infty$ до $+\infty$ она параллельно сдвигается вправо.

Находясь левее положения касательной к окружности, прямая L пересекает график Г в одной точке (пересекает кусок прямой $y = -x$). Найдем значение a, при котором происходит касание, то есть прямая L и окружность имеют одну общую точку. Это означает, что система уравнений $\begin{cases} y = x - a, \\ (x-1)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ имеет единственное решение $(x;y)$. Подставив y во второе уравнение, получим квадратное уравнение $2x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 4 = 0$. Оно имеет единственный корень x, когда дискриминант $D = -4a^2 + 8a + 36 = 0$, а именно при $a = 1 - \sqrt{10}$ и $a = 1 + \sqrt{10}$. При этих значениях a система $\begin{cases} y = x - a, \\ (x-1)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ имеет единственное решение $(x;y)$, происходит касание. Левую полуокружность прямая L касается при меньшем значении $a = 1 - \sqrt{10}$, а правую полуокружность при $a = 1 + \sqrt{10}$. Итак, при $a < 1 - \sqrt{10}$ прямая L пересекает график Г в одной точке.

При $a = 1 - \sqrt{10}$ имеем две точки пересечения: добавляется точка касания. Перемещаясь от положения касательной до точки A, прямая L пересекает график Г в трех точках (пересекает кусок прямой $y = -x$ и два раза кусок окружности). Найдем значение a, при котором прямая L проходит через точку A: подставив координаты точки A в уравнение прямой L, получим $1 = -1 - a \Rightarrow a = -2$ ($-2 > 1 - \sqrt{10}$). Итак, при $1 - \sqrt{10} < a < -2$ имеем три пересечения.

При $a = -2$ имеем две точки пересечения (с куском окружности). Перемещаясь от точки A далее до положения

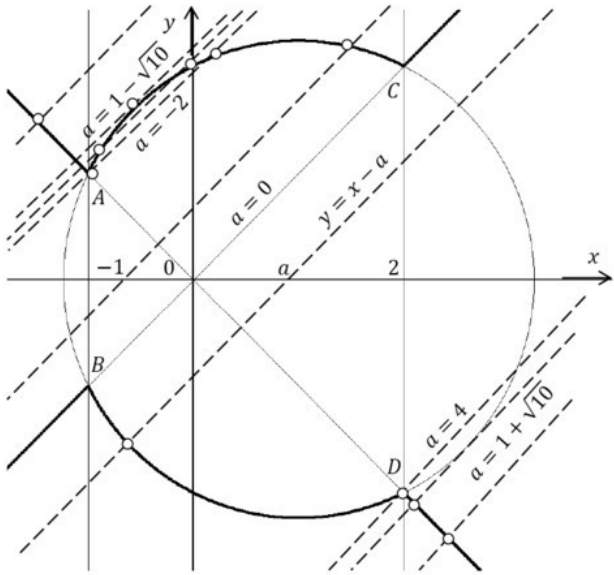


Рис.1.13

BC $(y = x)$, где $a = 0$, прямая L пересекает график Г в одной точке (на куске окружности): при $-2 < a < 0$ имеем одно пересечение.

При $a = 0$ прямая L совпадает с прямой $y = x$, и точками пересечения прямой L с графиком Г являются все точки прямой $y = x$ вне интервала (BC). Следовательно, имеем бесконечное множество точек пересечения. Перемещаясь далее до точки D включительно, прямая L пересекает график Г в одной точке (на куске окружности). Найдем значение a, при

котором прямая L проходит через точку D : подставив координаты точки D в уравнение прямой L, получим $-2 = 2 - a \Rightarrow a = 4$ (так как $4 < 1 + \sqrt{10}$, то точка D расположена левее касательной к правой полуокружности). При $0 < a \le 4$ имеем одно пересечение (с куском окружности).

При $a > 4$ одно пересечение (с куском прямой $y = -x$).

Делаем вывод: более двух пересечений имеется при $1 - \sqrt{10} < a < -2$ и $a = 0$.

Ответ: $1 - \sqrt{10} < a < -2$ и $a = 0$.

5.3.18

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 1| + 2x - x^2 = |y^2 - 1| + 2y - y^2, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.

Будем решать графически. Решениями $(x;y)$ системы являются точки пересечения графика Г первого уравнения с прямой L: $x + y = a \Leftrightarrow y = -x + a$. Требуется найти значения a, при которых имеется более двух пересечений.

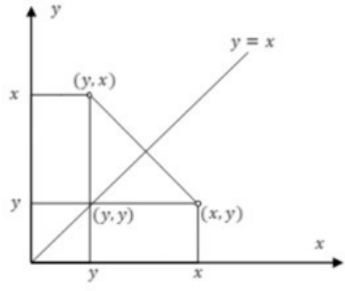


Рис.1.14

Заметим, что уравнение имеет симметрию: если (x, y) – его решение, то (y, x) тоже является решением. На координатной плоскости xy (рис.1.14) точки (x, y) и (y, x) симметричны относительно прямой $y = x$. (В прямоугольном равнобедренном треугольнике с вершинами (x, y), (y, y) и (y, x) отрезок биссектрисы $y = x$ является

одновременно высотой и медианой и потому прямая $y = x$ проходит через середину отрезка $[(x, y), (y, x)]$ перпендикулярно к нему). Следовательно, график Г симметричен относительно прямой $y = x$.

Ввиду того, что имеются четыре варианта раскрытия модулей, график Г будет состоять из 4 кусков, расположенных в четырех областях G_1, G_2, G_3, G_4 координатной плоскости.

G_1: $\begin{cases} x^2 > 1, \\ y^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y < -1, \\ y > 1 \end{array}\right. \end{cases}$ – объединение четырех крайних углов. В этой области уравнение имеет вид $x^2 - 1 + 2x - x^2 = y^2 - 1 + 2y - y^2 \Leftrightarrow y = x$. Это куски биссектрисы 1-го и 3-го квадрантов вне отрезка $[FC]$.

G_2: $\begin{cases} x^2 \le 1, \\ y^2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$ – центральный квадрат. Здесь $-x^2 + 1 + 2x - x^2 = -y^2 + 1 + 2y - y^2 \Leftrightarrow y^2 - x^2 + x - y = 0 \Leftrightarrow (y - x)(y + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x, \\ y = -x + 1. \end{array}\right.$ Это крест, составленный из отрезка $[FC]$ прямой $y = x$ и из отрезка $[AB]$ прямой $y = -x + 1$.

G_3: $\begin{cases} x^2 > 1, \\ y^2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 1, \end{array}\right. \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$ – объединение двух горизонтальных продолжений центрального квадрата. В этой области $x^2 - 1 + 2x - x^2 = -y^2 + 1 + 2y - y^2 \Leftrightarrow x = -y^2 + y + 1$. Это кусок параболы с ветвями влево с вершиной $E = \left(\frac{5}{4}; \frac{1}{2}\right)$, проходящей через точки B и C.

G_4: $\begin{cases} x^2 \le 1, \\ y^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} y < -1, \\ y > 1 \end{array}\right. \end{cases}$ – объединение двух вертикальных продолжений центрального квадрата. В этой области $-x^2 + 1 + 2x - x^2 = y^2 - 1 + 2y - y^2 \Leftrightarrow y = -x^2 + x + 1$. Это кусок параболы с ветвями вниз с вершиной $D = \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$, проходящей через точки A и C (эта парабола симметрична с предыдущей параболой относительно прямой x).

На рис.1.15 график Г изображен сплошными линиями.

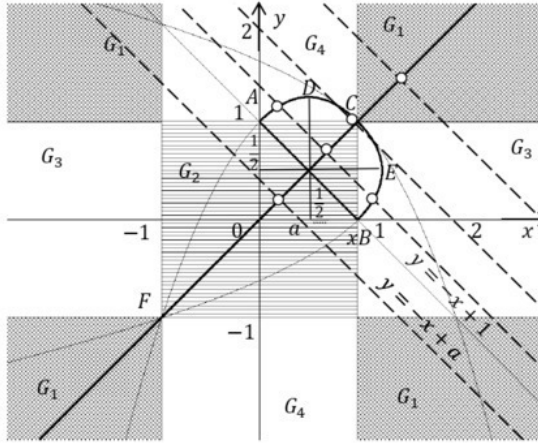


Рис.1.15

Отметим, что в точке пересечения C параболы имеют общую касательную. В самом деле, угловой коэффициент касательной к параболе $y = -x^2 + x + 1$ в точке $C = (1;1)$ равен значению производной $y'(x) = -2x + 1$ в точке $x = 1$: $k = y'(1) = -1$. Уравнение касательной можно найти в виде $y = kx + b$. У нас $k = -1$, $x = 1$, $y = 1$, так что имеем $1 = -1 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 2$. Поэтому касательная имеет уравнение $y = -x + 2$. Она перпендикулярна прямой $y = x$ (согласно условию перпендикулярности: произведение угловых коэффициентов равно -1). В силу симметричности парабол относительно прямой $y = x$ эта же прямая $y = -x + 2$ является касательной к параболе $x = -y^2 + y + 1$.

Прямая L: $y = -x + a$ проходит через точку $(a;0)$

параллельно прямой AB: $y = -x + 1$ и касательной $y = -x + 2$. При возрастании значения a от $-\infty$ до $+\infty$ она параллельно сдвигается вправо.

По рисунку видим, что двигаясь вправо до положения AB, она пересекает график Г в одной точке (пересекает прямую $y = x$). Прямая AB проходит через точку $(1; 0)$, так что прямая L совпадает с ней при $a = 1$. В этом положении прямая L пересекает график Г в бесконечном множестве точек (это множество точек отрезка $[AB]$).

При $1 < a < 2$ прямая L, находясь между прямой AB и касательной, пересекает график Г в трех точках (пересекает прямую $y = x$ и обе параболы).

При $a \geq 2$, в положении касательной и дальше имеется одно пересечение.

Значит, более двух пересечений имеем при $1 \leq a < 2$.

Ответ: $1 \leq a < 2$.

5.3.19

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y|, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.

Будем решать графически. Решениями $(x; y)$ системы являются точки пересечения графика Г первого уравнения с прямой L: $x + y = a \Leftrightarrow y = -x + a$. Требуется найти значения a, при которых имеется более двух пересечений.

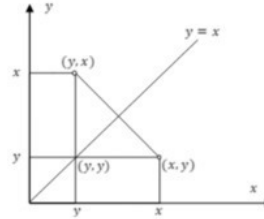


Рис.1.16

Заметим, что уравнение имеет

симметрию: если (x,y) – его решение, то (y,x) тоже является решением. На координатной плоскости xy (рис.1.16) точки (x,y) и (y,x) симметричны относительно прямой $y=x$. (В прямоугольном равнобедренном треугольнике с вершинами $(x,y),(y,y)$ и (y,x) отрезок биссектрисы $y=x$ является одновременно высотой и медианой и потому прямая $y=x$ проходит через середину отрезка $[(x,y),(y,x)]$ перпендикулярно к нему). Следовательно, график Г симметричен относительно прямой $y=x$.

Ввиду того, что имеются четыре варианта раскрытия модулей, график Г будет состоять из 4 кусков, расположенных в четырех областях G_1, G_2, G_3, G_4 координатной плоскости. На рис.1.17 график Г изображен сплошными линиями. Отметим, что в точке пересечения O параболы имеют общую

G_1: $\begin{cases} x^2-2x>0, \\ y^2-2y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<0, \\ x>2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y<0, \\ y>2 \end{array}\right. \end{cases}$ – объединение четырех крайних углов. В этой области уравнение имеет вид $x^2+x^2-2x=y^2+y^2-2y \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x, \\ y=-x+1. \end{array}\right.$ Это куски биссектрисы 1-го и 3-го квадрантов вне отрезка $[OC]$ и куски прямой $y=-x+1$ вне отрезка $[AB]$.

G_2: $\begin{cases} x^2-2x\le 0, \\ y^2-2y\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2, \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$ – центральный квадрат. Здесь $x^2-x^2+2x=y^2-y^2+2y \Leftrightarrow y=x$. Это отрезок $[OC]$ прямой $y=x$.

G_3: $\begin{cases} x^2-2x>0, \\ y^2-2y\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<0, \\ x>2, \end{array}\right. \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$ – объединение двух горизонтальных продолжений центрального квадрата. В этой области $x^2+x^2-2x=y^2-y^2+2y \Leftrightarrow y=x^2-x$. Это кусок $[AO]$ параболы с ветвями вверх с вершиной $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$, проходящей через точку $C=(2;2)$. продолжений центрального квадрата. В этой области $x^2+x^2-2x=y^2-y^2+2y \Leftrightarrow$

$y = x^2 - x$. Это кусок $[AO]$ параболы с ветвями вверх с вершиной $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}\right)$, проходящей через точку $C = (2;2)$.

G_4: $\begin{cases} x^2 - 2x \le 0, \\ y^2 - 2y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} y < 0, \\ y > 2 \end{array}\right. \end{cases}$ – объединение двух вертикальных продолжений центрального квадрата. В этой области $x^2 - x^2 + 2x = y^2 + y^2 - 2y \Leftrightarrow x = y^2 - y$. Это кусок $[OB]$ параболы с ветвями вправо с вершиной $\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right)$, проходящей через точку C (и симметричной с предыдущей параболой относительно прямой $y = x$).

На рис.1.17 график Г изображен сплошными линиями. Отметим, что в точке пересечения O параболы имеют общую касательную. В самом деле, угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2 - x$ в точке $O = (0;0)$ равен значению производной $y'(x) = 2x - 1$ в точке $x = 0$: $k = y'(0) = -1$. Поэтому касательная имеет уравнение $y = -x$. Она перпендикулярна прямой $y = x$ (согласно условию перпендикулярности: произведение угловых коэффициентов равно -1). В силу симметричности парабол относительно прямой $y = x$ эта же прямая $y = -x$ является касательной к параболе $x = y^2 - y$.

Прямая L: $y = -x + a$ проходит через точку $(a;0)$ параллельно прямой AB: $y = -x + 1$ и касательной $y = -x$. При возрастании значения a от $-\infty$ до $+\infty$ она параллельно сдвигается вправо.

По рисунку видим, что двигаясь вправо до положения касательной включительно, она пересекает график Г в одной точке (пересекает прямую $y = x$). Касание происходит при $a = 0$, следовательно, при $a \le 0$ прямая L пересекает график Г в одной точке.

Перемещаясь далее до положения AB: $y = -x + 1$, при котором $a = 1$, она пересекает Г в трех точках (пересекает прямую $y = x$ и обе параболы). Следовательно, при $0 < a < 1$ имеем три пересечения.

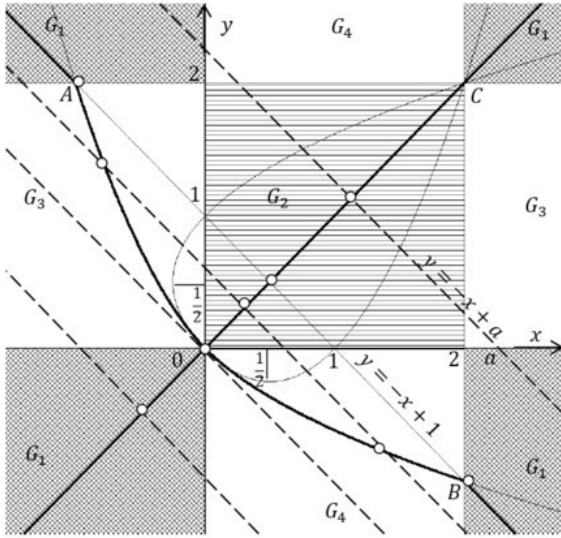


Рис. 1.17

В положении AB при $a = 1$ прямая L пересекает график Г в бесконечном множестве точек (это множество точек прямой $y = -x + 1$ вне интервала (AB)).

При $a > 1$ имеем одно пересечение (с прямой $y = x$).

Ответ: $0 < a \leq 1$.

5.3.20

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| - x^2 = |y^2 - 2y| - y^2, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.

Будем решать графически. Решениями $(x;y)$ системы являются точки пересечения графика Г первого уравнения с прямой L: $x+y=a \Leftrightarrow y=-x+a$. Требуется найти значения a, при которых имеется более двух пересечений.

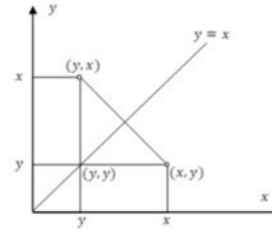


Рис.1.18

Заметим, что уравнение имеет симметрию: если (x,y) – его решение, то (y,x) тоже является решением. На координатной плоскости xy (рис.1.18) точки (x,y) и (y,x) симметричны относительно прямой $y=x$. (В прямоугольном равнобедренном треугольнике с вершинами $(x,y),(y,y)$ и (y,x) отрезок биссектрисы $y=x$ является одновременно высотой и медианой и потому прямая $y=x$ проходит через середину отрезка $[(x,y),(y,x)]$ перпендикулярно к нему). Следовательно, график Г симметричен относительно прямой $y=x$.

Ввиду того, что имеются четыре варианта раскрытия модулей, график Г будет состоять из 4 кусков, расположенных в четырех областях G_1, G_2, G_3, G_4 координатной плоскости.

G_1: $\begin{cases} x^2-2x>0, \\ y^2-2y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<0, \\ x>2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y<0, \\ y>2 \end{array}\right. \end{cases}$ – объединение четырех крайних углов. В этой области уравнение имеет вид $x^2-2x-x^2=y^2-2y-y^2 \Leftrightarrow y=x$. Это куски биссектрисы 1-го и 3-го квадрантов вне отрезка $[OC]$.

G_2: $\begin{cases} x^2-2x\le 0, \\ y^2-2y\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2, \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$ – центральный квадрат. Здесь $-x^2+2x-x^2=-y^2+2y-y^2 \Leftrightarrow (y-x)(y+x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} y = x, \\ y = -x + 1. \end{bmatrix}$ Это крест, составленный из отрезка $[OC]$ прямой $y = x$ и из отрезка $[AB]$ прямой $y = -x + 1$.

G_3: $\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ y^2 - 2y \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x < 0, \\ x > 2, \end{bmatrix} \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$ – объединение двух горизонтальных продолжений центрального квадрата. В этой области $x^2 - 2x - x^2 = -y^2 + 2y - y^2 \Leftrightarrow x = y^2 - y$. Это кусок $[AO]$ параболы с ветвями вправо с вершиной $(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$, проходящей через точку $C = (2; 2)$.

G_4: $\begin{cases} x^2 - 2x \le 0, \\ y^2 - 2y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \begin{bmatrix} y < 0, \\ y > 2 \end{bmatrix} \end{cases}$ – объединение двух вертикальных продолжений центрального квадрата. В этой области

$$-x^2 + 2x - x^2 = y^2 - 2y - y^2 \Leftrightarrow y = x^2 - x.$$

Это кусок $[OB]$ параболы с ветвями вверх с вершиной $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$, проходящей через точку C (эта парабола симметрична с предыдущей параболой относительно прямой $y = x$).

На рис.1.19 график Г изображен сплошными линиями. Отметим, что в точке пересечения O параболы имеют общую касательную. В самом деле, угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2 - x$ в точке $O = (0; 0)$ равен значению производной $y'(x) = 2x - 1$ в точке $x = 0$: $k = y'(0) = -1$. Поэтому касательная имеет уравнение $y = -x$. Она перпендикулярна прямой $y = x$ (согласно условию перпендикулярности: произведение угловых коэффициентов равно -1). В силу симметричности парабол относительно прямой $y = x$ эта же прямая $y = -x$ является касательной к параболе $x = y^2 - y$.

Прямая L: $y = -x + a$ проходит через точку $(a; 0)$ параллельно прямой AB: $y = -x + 1$ и касательной $y = -x$. При возрастании значения a от $-\infty$ до $+\infty$ она параллельно сдвигается вправо.

По рисунку видим, что двигаясь вправо до положения касательной включительно, она пересекает график Г в одной точке (пересекает прямую $y = x$). Касание происходит при $a = 0$, следовательно, при $a \leq 0$ прямая L пересекает график Г в

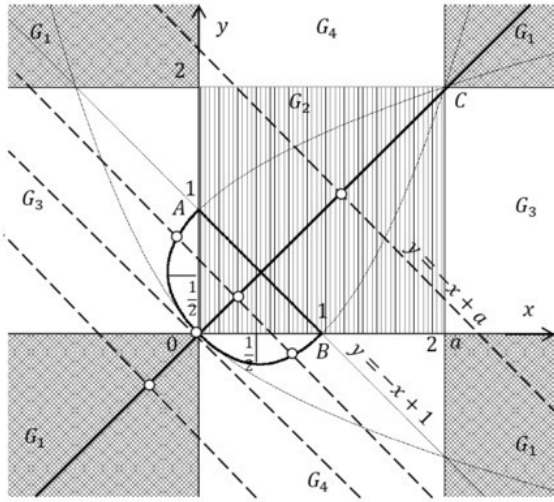


Рис.1.19

одной точке.

Перемещаясь далее до положения $AB: y = -x + 1$, при котором $a = 1$, она пересекает Г в трех точках (пересекает прямую $y = x$ и обе параболы). Следовательно, при $0 < a < 1$ имеем три пересечения.

В положении AB при $a = 1$ прямая L пересекает график Г в бесконечном множестве точек (это множество точек отрезка $[AB]$ прямой $y = -x + 1$).

При $a > 1$ имеем одно пересечение (с прямой $y = x$).

Ответ: $0 < a \leq 1$.

1.2. 18-я задача из сборника И.В.Ященко ЕГЭ 2020

Вариант 1

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x - 5 - 2ax + 6a - a^2 = 0$$

имеет не менее трех корней.

Решение.

Будем решать графически, рассматривая данное уравнение как уравнение вида $f(x,a) = 0$ с двумя неизвестными x и a. Множество его решений (x,a) на координатной плоскости $0xa$ представляет собой график уравнения. При фиксированном числовом значении $a = k$ получается уравнение $f(x,k) = 0$ с одним неизвестным x. Его корнями являются первые координаты решений (x,k) уравнения $f(x,a) = 0$. На рис.1.20 показаны корни x_1, x_2, x_3. Количество корней равно количеству пересечений графика с прямой $a = k$.

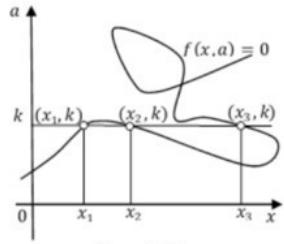


Рис.1.20

График данного уравнения четвертой степени попробуем получить как объединение графиков уравнений меньших степеней. С этой целью левую часть уравнения разложим на множители. Мы увидим, что это возможно, если перепишем уравнение в виде:

$$a^2 + (2x - 6)a - (x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x - 5) = 0$$

и заметим, что левая часть есть квадратный трехчлен оносительно переменной a. Его корни

$$a_{1,2} = 3 - x \pm \sqrt{(3-x)^2 + x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x - 5} = 3 - x \pm \sqrt{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4}.$$

Здесь подкоренное выражение может быть квадратом

некоторого квадратного трехчлена x^2+px+q при подходящем выборе коэффициентов p и q. Этот квадрат равен

$$(x^2+px+q)^2 = x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$$

и отсюда видно, что для p и q должны выполняться условия $\begin{cases} 2p=-2, \\ p^2+2q=-3, \\ 2pq=4, \\ q^2=4. \end{cases}$ Эта система имеет решение $p=-1$, $q=-2$. Значит,

$$x^4-2x^3-3x^2+4x+4 = (x^2-x-2)^2,$$

так что

$$a_{1,2} = 3-x \pm \sqrt{(x^2-x-2)^2} = 3-x \pm |x^2-x-2| = 3-x \pm (x^2-x-2),$$

$a_1 = 3-x-x^2+x+2 = 5-x^2$, $a_2 = 3-x+x^2-x-2 = (x-1)^2$,

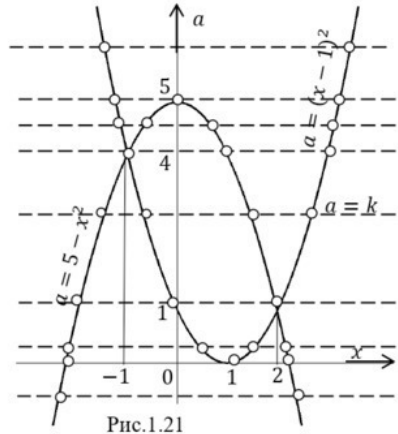


Рис.1.21

В результате разложения левой части на множители уравнение принимает вид $\big(a-(5-x^2)\big)\big(a-(x-1)^2\big)=0$ и потому равносильно совокупности двух уравнений второй степени

$$\left[\begin{array}{l} a = 5-x^2, \\ a = (x-1)^2, \end{array}\right.$$

а его график является объединением графиков этих уравнений – объединением двух парабол. Параболы имеют вершины $(0, 5)$ и $(1, 0)$ и пересекаются в точках $(-1, 4)$ и $(2, 1)$.

При разных значениях k прямая $a = k$ пересекает график разное число раз и соответственно имеем разное число корней.

Из рис.1.21 видим, что не менее трех корней имеем при $k \in [0, 5]$.

Ответ: $0 \le a \le 5$.

Вариант 2

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4ax + 6a - a^2 = 0$$

имеет не менее трех корней.

Решение.

Будем решать графически, рассматривая данное уравнение как уравнение вида $f(x, a) = 0$ с двумя неизвестными x и a. Множество его решений (x, a) на координатной плоскости $0xa$ представляет собой график уравнения. При фиксированном числовом значении $a = k$ получается уравнение $f(x, k) = 0$ с одним неизвестным x. Его корнями являются первые координаты решений (x, k) уравнения $f(x, a) = 0$. На рис.1.22 показаны корни x_1, x_2, x_3. Количество корней равно количеству пересечений графика с прямой $a = k$.

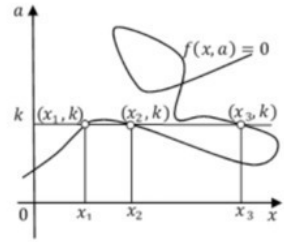


Рис.1.22

График нашего уравнения четвертой степени попробуем получить как объединение графиков уравнений меньших степеней. Для этого левую часть уравнения разложим на множители. Сгруппируем в скобки члены с одинаковыми

числовыми коэффициентами, разложим каждую скобку на множители и общий множитель вынесем за скобки

$$(x^4 - a^2) + (4ax - 4x^3) + (6a - 6x^2) =$$
$$(x^2 - a)(x^2 + a) + 4x(a - x^2) + 6(a - x^2) =$$
$$(x^2 - a)(x^2 + a - 4x - 6).$$

Итак, данное уравнение принимает вид

$$(x^2 - a)(x^2 + a - 4x - 6) = 0$$

и потому равносильно совокупности двух уравнений второй степени $\left[\begin{array}{l} a=x^2, \\ a=-x^2+4x+6, \end{array}\right.$

а его график (рис.1.23) является объединением графиков этих уравнений – объединением двух парабол. Параболы имеют вершины $(0, 0)$ и $(2, 10)$ и пересекаются в точках $(-1, 1)$ и $(3, 9)$.

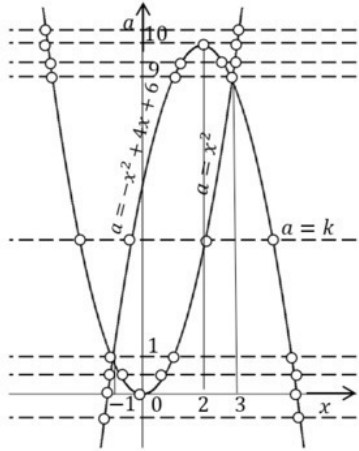


Рис.1.23

При разных значениях k прямая $a = k$ пересекает график разное число раз и соответственно имеем разное число корней.

Из рисунка видим, что не менее трех корней имеем при $k \in [0,\ 10]$.

Ответ: $0 \le a \le 10$.

Вариант 3

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$x^4 + 4x^3 + 4ax - 16x - 16 + 8a - a^2 = 0$$

имеет не менее трех корней.

Решение.

Будем решать графически, рассматривая данное уравнение как уравнение вида $f(x,a) = 0$ с двумя неизвестными x и a. Множество его решений (x,a) на координатной плоскости $0xa$ представляет собой график уравнения. При фиксированном числовом значении $a = k$ получается уравнение $f(x,k) = 0$ с одним неизвестным x. Его корнями являются первые координаты решений (x,k) уравнения $f(x,a) = 0$. На рис.1.24 показаны корни x_1, x_2, x_3. Количество корней равно количеству пересечений графика с прямой $a = k$.

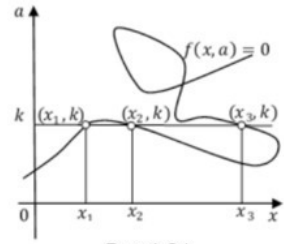


Рис.1.24

График нашего уравнения четвертой степени попробуем получить как объединение графиков уравнений меньших степеней. С этой целью левую часть уравнения разложим на множители. Мы увидим, что это возможно, если перепишем уравнение в виде:

$$a^2 - (4x + 8)a - (x^4 + 4x^3 - 16x - 16) = 0$$

и заметим, что левая часть предтавляет собой квадратный трехчлен оносительно переменной a. Его корни

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= 2x + 4 \pm \sqrt{(2x+4)^2 + x^4 + 4x^3 - 16x - 16} \\ &= 2x + 4 \pm \sqrt{x^4 + 4x^3 + 4x^2} \\ &= 2x + 4 \pm \sqrt{x^4 + 4x^3 + 4x^2} = 2x + 4 \pm \sqrt{x^2(x+2)^2} \end{aligned}$$

$= 2x + 4 \pm |x^2 + 2x| = 2x + 4 \pm (x^2 + 2x)$,
так что
$a_1 = 2x + 4 - x^2 - 2x = 4 - x^2$, $a_2 = 2x + 4 + x^2 + 2x = (x + 2)^2$.
После разложения левой части на множители уравнение принимает вид $(a - (4 - x^2))(a - (x + 2)^2) = 0$ и потому равносильно совокупности двух уравнений второй степени $\left[\begin{array}{l} a = 4 - x^2, \\ a = (x + 2)^2, \end{array}\right.$ а его график является объединением графиков этих уравнений – объединением двух парабол. Параболы пересекаются в вершинах $(0, 4)$ и $(-2, 0)$.

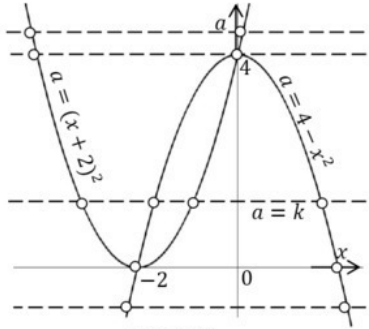


Рис.1.25

При разных значениях k прямая $a = k$ пересекает график разное число раз и соответственно имеем разное число корней.

Из рис.1.25 видим, что не менее трех корней (четыре) имеем при $k \in (0,\ 4)$.

Ответ: $0 < a < 4$.

Примечание. В сборнике в ответе опечатка: $a \leq 4$.

Вариант 4

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$x^4 - 8x^2 - 9 + 10a - a^2 = 0$$

имеет не менее трех корней.

Решение.

Будем решать графически, рассматривая данное уравнение как уравнение вида $f(x,a)=0$ с двумя неизвестными x и a. Множество его решений (x,a) на координатной плоскости $0xa$ представляет собой график уравнения. При фиксированном числовом значении $a=k$ получается уравнение $f(x,k)=0$ с одним неизвестным x. Его корнями являются первые координаты решений (x,k) уравнения $f(x,a)=0$. На рис.1.26 показаны корни x_1, x_2, x_3. Количество корней равно количеству пересечений графика с прямой $a=k$.

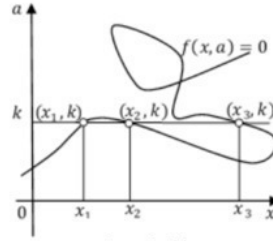


Рис.1.26

График нашего уравнения четвертой степени попробуем получить как объединение графиков уравнений меньших степеней. Для этого левую часть уравнения разложим на множители. Первые два слагаемых являются частью от $(x^2-4)^2=x^4-8x^2+16$, а последние два – частью от

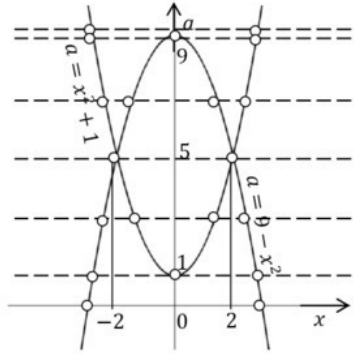


Рис.1.27

$-(a-5)^2 = -a^2 + 10a - 25$. Представив -9 в виде $16-25$, получаем левую часть уравнения в виде

$$(x^2-4)^2-(a-5)^2 = (x^2-4-a+5)(x^2-4+a-5) = (x^2+1-a)(a-(9-x^2)),$$

и потому данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений второй степени

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2+1, \\ a = 9-x^2, \end{array}\right.$$

а его график (рис.1.27) является объединением графиков этих уравнений – объединением двух парабол. Параболы имеют вершины $(0,1)$ и $(0,9)$ и пересекаются в точках $(-2,5)$ и $(2,5)$.

При разных значениях k прямая $a = k$ пересекает график разное число раз и соответственно имеем разное число корней.

Из рисунка видим, что не менее трех корней имеем при $k \in [1,\ 5) \cup (5,9]$.

Ответ: $1 \le a < 5,\ 5 < a \le 9$.

Примечание. В сборнике в ответе не учтено исключение значения $a = 5$.

Вариант 5

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 20x + 20 - 2ax + 8a - a^2 = 0$$

имеет не менее трех корней.

Решение.

Будем решать графически, рассматривая данное уравнение как уравнение вида $f(x,a) = 0$ с двумя неизвестными x и a. Множество его решений (x,a) на координатной плоскости $0xa$ представляет собой график уравнения. При фиксированном числовом значении $a = k$ получается уравнение $f(x,k) = 0$ с одним неизвестным x. Его корнями являются первые координаты решений (x,k) уравнения $f(x,a) = 0$. На рис.1.28

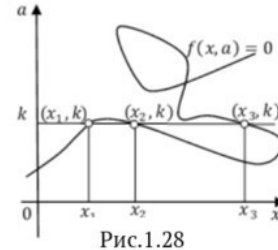


Рис.1.28

показаны корни x_1, x_2, x_3. Количество корней равно количеству пересечений графика с прямой $a = k$.

График нашего уравнения четвертой степени попробуем получить как объединение графиков уравнений меньших степеней. Для этого левую часть уравнения разложим на множители. Мы увидим, что это возможно, если перепишем уравнение в виде:

$$a^2+(2x-8)a-(x^4-2x^3-12x^2+20x+20)=0$$

и заметим, что левая часть представляет собой квадратный трехчленом оносительно переменной a. Его корни

$$a_{1,2}=4-x\pm\sqrt{(4-x)^2+x^4-2x^3-12x^2+20x+20}=$$
$$4-x\pm\sqrt{x^4-2x^3-11x^2+12x+36}.$$

Подкоренное выражение может быть квадратом некоторого квадратного трехчлена x^2+px+q при подходящем выборе коэффициентов p и q. Этот квадрат равен $(x^2+px+q)^2=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$ и отсюда видно, что для p и q должны выполняться условия $\begin{cases}2p=-2,\\ p^2+2q=-11,\\ 2pq=12,\\ q^2=36,\end{cases}$ Эта система имеет решение $p=-1,\ q=-6$. Значит,

$$x^4-2x^3-11x^2+12x+36=(x^2-x-6)^2,$$

так что

$$a_{1,2}=4-x\pm\sqrt{(x^2-x-6)^2}=4-x\pm|x^2-x-6|$$
$$=4-x\pm(x^2-x-6),$$
$$a_1=4-x-x^2+x+6=10-x^2,$$
$$a_2=4-x+x^2-x-6=x^2-2x-2.$$

После разложения левой части на множители уравнение принимает вид $\big(a-(10-x^2)\big)\big(a-(x^2-2x-2)\big)=0$ и потому равносильно совокупности двух уравнений второй степени

$$\left[\begin{array}{l}a=10-x^2,\\ a=x^2-2x-2,\end{array}\right.$$

а его график (рис.1.29) является объединением графиков этих уравнений – объединением двух парабол. Параболы имеют

вершины $(0;\ 10)$ и $(1;\ -3\ )$ и пересекаются в точках $(3;\ 1)$ и $(-2;\ 6)$.

При разных значениях k прямая $a = k$ пересекает график разное число раз и соответственно имеем разное число корней.

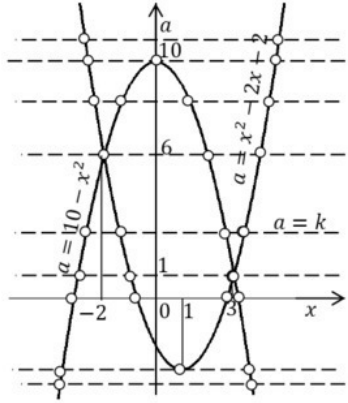


Рис.1.29

Из рисунка видим, что не менее трех корней имеем при $k \in [-3,\ 10]$.

Ответ: $-3 \le a \le 10$.

Вариант 6

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(x^2 + x + 2a^2 + 1)^2 = 8a^2(x^2 + x + 1)$$

имеет ровно один корень.

Решение.

Обозначим $t = x^2 + x + 1$. Тогда

$(t + 2a^2)^2 = 8a^2 t \Leftrightarrow t^2 + 4a^2 t + 4a^4 = 8a^2 t \Leftrightarrow t^2 - 4a^2 t + 4a^4 = 0$
$\Leftrightarrow (t - 2a^2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2a^2$.

Получили равносильное квадратное уравнение

$$x^2 + x + 1 = 2a^2 \Leftrightarrow x^2 + x + (1 - 2a^2) = 0.$$

Оно имеет ровно один корень, когда его дискриминант

$$D = 1 - 4(1 - 2a^2) = 8a^2 - 3 = 0,$$

то есть при $a = \pm\sqrt{\frac{3}{8}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$. Найдем этот корень. При $a = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$ имеем $x^2 + x + 1 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (2x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $a = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$. .

Примечание. В сборнике дан перевернутый ответ: $a = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3} = \pm\frac{4}{\sqrt{6}}$.

Варианты 7, 8, 9, 10 (повторяется вариант 6 с другими числовыми данными, с заменой соответственно

$$t = 2x^2 + x + 5,\ x^2 - x + 1,\ x^2 - x + 3,\ x^2 - x + 1)$$

Вариант 11

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-3,5}(4x^2 + 9) = \log_{a-3,5}(4(a - 3)x + 8)$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a - 3,5 > 0, \\ a - 3,5 \neq 1, \\ 4(a - 3)x + 8 > 0, \\ 4x^2 + 9 = 4(a - 3)x + 8. \end{cases}$$

Заметим, что подсистема $\begin{cases} 4(a - 3)x + 8 > 0, \\ 4x^2 + 9 = 4(a - 3)x + 8 \end{cases}$ равносильна одному уравнению $4x^2 + 9 = 4(a - 3)x + 8$. В самом деле, если неравенство и равенство полсистемы выполнены, то равенство $4x^2 + 9 = 4(a - 3)x + 8$ выполнено. Обратно, если это равенство выполнено, то вместе с ним верно и неравенство $4(a - 3)x + 8 > 0$, так как $4x^2 + 9 > 0$ при всех x.

В силу этого замечания данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a - 3,5 > 0, \\ a - 3,5 \neq 1, \\ 4x^2 + 9 = 4(a - 3)x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 3,5, \\ a \neq 4,5, \\ 4x^2 - 4(a - 3)x + 1 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет ровно два различных корня, когда его дискриминант

$D = 16(a-3)^2 - 16 > 0$, то есть при $(a-3)^2 > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 4, \\ a < 2. \end{array}\right.$

С учетом ограничений $a > 3{,}5$, $a \neq 4{,}5$ получаем $\left[\begin{array}{l} 4 < a < 4{,}5, \\ a > 4{,}5. \end{array}\right.$

Ответ: $4 < a < 4{,}5,\ a > 4{,}5$.

Варианты 12, 13, 14, 15 (повторяется вариант 11 с другими числовыми данными)

Вариант 16

Найдите все значения k, при каждом из которых уравнение

$$\frac{1+(2-2k)\sin t}{\cos t - \sin t} = 2k$$

имеет хотя бы одно решение на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

При $t = \frac{\pi}{4} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ знаменатель обращается в нуль, поэтому уточним задачу: надо найти все значения k, при каждом из которых уравнение $\frac{1+(2-2k)\sin t}{\cos t - \sin t} = 2k$ имеет хотя бы одно решение на множестве $(0; \frac{\pi}{4}) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Преобразуем данное равнение:

$$1 + 2\sin t - 2k\sin t = 2k\cos t - 2k\sin t \ \Leftrightarrow\ k = \frac{1+2\sin t}{2\cos t}$$

и сформулируем задачу иначе: найти все значения k, каждое из которых является значением функции $f(t) = \frac{1+2\sin t}{2\cos t}$ хотя бы при одном значении $t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, другими словами, найти множество значений функции $k = f(t) = \frac{1+2\sin t}{2\cos t}$ на множестве $\left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Эта функция определена на всем интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и возрастает на этом интервале, так как ее производная $k' = \frac{2+\sin t}{2\cos^2 t} > 0$. Поскольку $\lim_{t\to 0} \frac{1+2\sin t}{2\cos t} = \frac{1}{2}$

и $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+2\sin t}{2\cos t}=+\infty$, то множеством значений функции на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ является интервал $(\frac{1}{2};+\infty)$. Исключив значение $k=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$, получаем искомое множество значений функции на множестве $(0;\frac{\pi}{4})\cup\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$. Это $(\frac{1}{2};\frac{2+\sqrt{2}}{2})\cup\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$.

Ответ: $\frac{1}{2}<k<\frac{2+\sqrt{2}}{2}$, $k>\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 17

Найдите все неотрицательные значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1\le\frac{2a+x^2-4\log_{1/3}(4a^2-4a+9)}{5\sqrt{18x^4+7x^2}+2a+4+\log^2_{1/3}(4a^2-4a+9)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение.

Решение.

Сначала отметим, что $4a^2-4a+9>0$, так как дискриминант трехчлена $16-144<0$, так что логарифм определен при всех a. При неотрицательных значениях a знаменатель положителен (не меньше 4).

Обозначим $f(x)=\frac{2a+x^2-4\log_{1/3}(4a^2-4a+9)}{5\sqrt{18x^4+7x^2}+2a+4+\log^2_{1/3}(4a^2-4a+9)}$ и заметим, что в случае единственного решения $x=x_0$ неравенство $f(x)\ge 1$ будет равенством $f(x_0)=1$. Это следует из того, что при каждом $a\ge 0$ функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $(-\infty;+\infty)$. В самом деле, если бы было $f(x_0)>1$ как на левом рис.1.30, то в достаточной близости к x_0 нашлась бы точка x', в которой бы

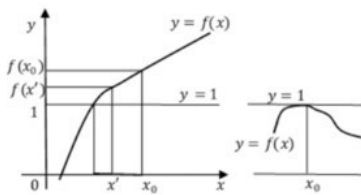


Рис.1.30

тоже выполнялось неравенство $f(x') > 1$, а это означало бы наличие двух различных решений x_0 и x'. Реальную ситуацию поясняет правый рис.1.30 (так как при всех $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) < 1$, то прямая $y = 1$ касается графика функции сверху). Итак, на деле вместо данного неравенства имеем уравнение

$$\frac{2a+x^2-4\log_{1/3}(4a^2-4a+9)}{5\sqrt{18x^4+7x^2+2a+4+\log^2_{1/3}(4a^2-4a+9)}} = 1 \qquad (1)$$

Переменная x содержится в уравнении в четных степенях, поэтому если x – решение уравнения, то $-x$ тоже является решением. Так как решение x должно быть единственным, то оно не может быть отличным от нуля, иначе были бы два различных решения x и $-x$. Значит, решением может быть только $x = 0$. Допустим, что $x = 0$ – решение. Тогда выполняется равенство $\frac{2a-4\log_{1/3}(4a^2-4a+9)}{2a+4+\log^2_{1/3}(4a^2-4a+9)} = 1$, из которого можно найти соответствующие решению $x = 0$ значения a. Имеем

$$-4\log_{1/3}(4a^2-4a+9) = 4+\log^2_{1/3}(4a^2-4a+9) \Leftrightarrow$$
$$\log^2_{1/3}(4a^2-4a+9)+4\log_{1/3}(4a^2-4a+9)+4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\log_{1/3}(4a^2-4a+9)+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \log_{1/3}(4a^2-4a+9) = -2 \Leftrightarrow$$
$$4a^2-4a+9 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим оба случая.

При $a = 0$ уравнение (1) имеет вид $\frac{x^2-4\log_{1/3}9}{5\sqrt{18x^4+7x^2+4+\log^2_{1/3}9}} = 1 \Leftrightarrow$
$x^2+8 = 5\sqrt{18x^4+7x^2}+8 \Leftrightarrow x^4 = 25(18x^4+7x^2)$
$\Leftrightarrow (449x^2+175)x^2 = 0 \Rightarrow$ единственное решение $x = 0$.

При $a = 1$ уравнение (1) имеет вид
$\frac{2+x^2-4\log_{1/3}9}{5\sqrt{18x^4+7x^2+6+\log^2_{1/3}9}} = 1 \Leftrightarrow x^2+10 = 5\sqrt{18x^4+7x^2}+10 \Leftrightarrow$
$x^4 = 25(18x^4+7x^2) \Leftrightarrow (449\,x^2+175)x^2 = 0 \Rightarrow$ единственное решение $x = 0$.

Ответ: $a = 0$ и $a = 1$. При этом $x = 0$.

Вариант 18

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x^2 - x - 6| = (y-1)^2 + x - 7, \\ 3y = 2x + a \end{cases}$$

имеет ровно один или два корня.

Решение.

Будем решать графически. Учитывая, что $x^2 - x - 6 > 0$ при $x < -2$ и $x > 3$, $x^2 - x - 6 \le 0$ при $-2 \le x \le 3$, перепишем первое уравнение в виде совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 = (y-1)^2 + x - 7 \text{ при } x < -2 \text{ и } x > 3, \\ -x^2 + x + 6 = (y-1)^2 + x - 7 \text{ при } -2 \le x \le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} (y-1)^2 = (x-1)^2 \text{ при } x < -2 \text{ и } x > 3 \\ x^2 + (y-1)^2 = 13 \text{ при } -2 \le x \le 3. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} y = x, \\ y = 2 - x \end{array}\right. \text{при } x < -2 \text{ и } x > 3, \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 + \sqrt{13 - x^2}, \\ y = 1 - \sqrt{13 - x^2} \end{array}\right. \text{при } -2 \le x \le 3. \end{array}\right.$$

Видим, что график первого уравнения (на рис.1.31 сплошная линия) состоит из кусков двух прямых $y = x$ и $y = 2 - x$ вне полосы $-2 \le x \le 3$ и двух кусков $y = 1 + \sqrt{13 - x^2}$ и $y = 1 - \sqrt{13 - x^2}$ окружности $x^2 + (y-1)^2 = 13$ (с центром (0; 1) и радиусом $\sqrt{13}$) в полосе $-2 \le x \le 3$. Эти куски пересекаются в точках $E = (-2; 4)$, $D = (3; 3)$, $C = (-2; -2)$, $B = (3; -1)$.

График второго уравнения (на рисунке штриховая линия) – прямая $y = \frac{2}{3}x + \frac{a}{3}$ с угловым коэффициентом $\frac{2}{3}$ и начальной ординатой $\frac{a}{3}$. Ее угловой коэффициент отличается от угловых коэффициентов 1 и -1 прямых $y = x$ и $y = 2 - x$, поэтому при каждом значении a она пересекает обе эти прямые (часть точек пересечения находится в полосе $-2 \le x \le 3$).

При возрастании a от $-\infty$ до $+\infty$ прямая $y = \frac{2}{3}x + \frac{a}{3}$ параллельно перемещается вверх. При этом количество точек

ее пересечения с графиком первого уравнения – количество решений системы – меняется при переходе через точки ее касания с кусками окружности и точки пересечения кусков прямых с кусками окружностей.

Найдем точки касания прямой $y=\frac{2}{3}x+\frac{a}{3}$ с кусками окружности $y=1+\sqrt{13-x^2}$ и $y=1-\sqrt{13-x^2}$. Если $(x_0;\ y_0)$ – точка касания, то угловой коэффициент касательной к графику функции $y=y(x)$ равен значению производной $y'(x_0)$.

Для нижней полуокружности $y=1-\sqrt{13-x^2}$ имеем $y'(x_0)=\frac{x_0}{\sqrt{13-x_0^2}}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ x_0=2,\quad y_0=1-\sqrt{13-4}=-2\ \Rightarrow$ точка касания $A=(2;\ -2)$.

Для верхней полуокружности $y=1+\sqrt{13-x^2}$ имеем $y'(x_0)=-\frac{x_0}{\sqrt{13-x_0^2}}=\frac{2}{3}\Rightarrow x_0=-2, y_0=1+\sqrt{13-4}=4\Rightarrow$ точка касания совпадает с точкой $E=(-2;4)$.

Двигаясь по рисунку снизу вверх, прямая $y=\frac{2}{3}x+\frac{a}{3}$ пересекает график первого уравнения до точки A – 2 раза, проходя через точку A – 3 раза, от точки A до точки B – 4 раза, проходя через точку B – 3 раза, от точки B до точки C – 2 раза, проходя через точки C и D – по 1 разу, выше точки D – 2 раза. От точки C до точки D нет пересечения. Значит, ровно одно или два решения система имеет, когда прямая $y=\frac{2}{3}x+\frac{a}{3}$ проходит ниже точки A, между точками B и C и выше точки D. Найдем значения параметра a, при которых прямая $y=\frac{2}{3}x+\frac{a}{3}$ проходит через точки A, B, C и D.

Для точки $A=(2;\ -2)$: $-2=\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{a}{3}\ \Rightarrow\ a=-10$.

Для точки $B=(3;\ -1)$: $-1=\frac{2}{3}\cdot 3+\frac{a}{3}\Rightarrow a=-9$.

Для точки $C=(-2;\ -2)$: $-2=\frac{2}{3}\cdot(-2)+\frac{a}{3}\Rightarrow a=-2$.

Для точки $D=(3;3)$: $3=\frac{2}{3}\cdot 3+\frac{a}{3}\ \Rightarrow a=3$.

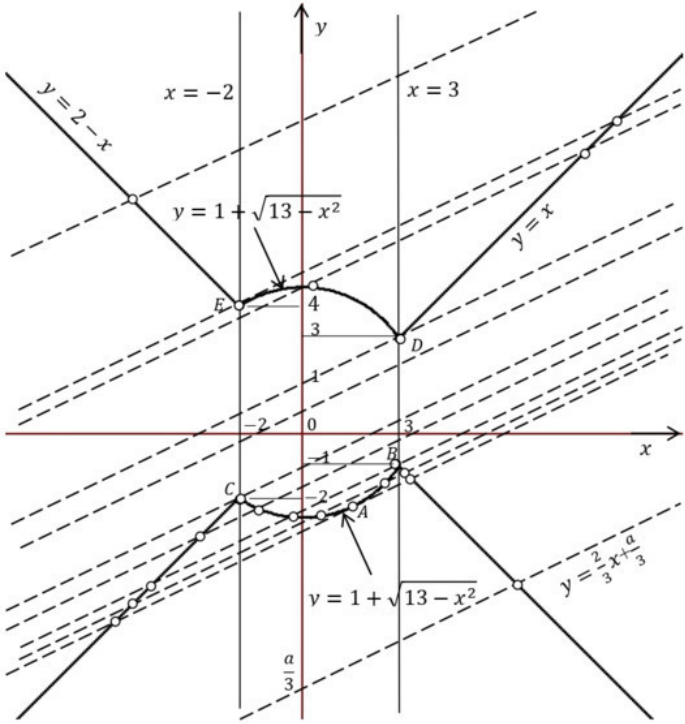


Рис. 1.31

Делаем вывод: система имеет ровно одно или два решения при

$$a < -10,\ -9 < a \le -2,\ a \ge 3.$$

Ответ: $a \in (-\infty;\ -10) \cup (-9;\ -2] \cup [3;\ +\infty)$.

Примечание. В сборнике в ответе не указан интервал $(-\infty;\ -10)$.

Вариант 19

Найдите все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения

$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$$

принимает наибольшее значение.

Решение.

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 12 - a^2 + 4a} = 3 \pm \sqrt{-a^2 + 4a - 3};$$

$$|x_2 - x_1| = 2\sqrt{-a^2 + 4a - 3}.$$

Квадратный трехчлен $-a^2 + 4a - 3$ принимает наибольшее значение посередине между корнями $a = 1$ и $a = 3$, при $a = 2$. Значит, $|x_2 - x_1|$ принимает наибольшее значение при $a = 2$. Это значение равно 2.

Ответ: $a = 2$.

Вариант 20

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |2x^2+y^2 - 1| + y^2 + 4y = 0, \\ y = 0{,}5x + a \end{cases}$$

имеет два или три корня.

Решение.

Будем решать графически. Для построения графика первого уравнения воспользуемся тем, что уравнение вида $|f| = g$ равносильно совокупности двух систем $\left[\begin{cases} g \geq 0, \\ f = g, \end{cases} \begin{cases} g \geq 0, \\ f = -g. \end{cases}\right.$ В нашем случае уравнение $|2x^2+y^2 - 1| = -y^2 - 4y$ равносильно совокупности $\left[\begin{cases} -y^2 - 4y \geq 0, \\ 2x^2+y^2 - 1 = -y^2 - 4y, \end{cases} \begin{cases} -y^2 - 4y \geq 0, \\ 2x^2+y^2 - 1 = y^2 + 4y. \end{cases}\right.$

Перепишем первую систему в виде

$$\begin{cases} -4 \leq y \leq 0, \\ 2x^2+2y^2 + 4y + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq y \leq 0, \\ x^2 + (y+1)^2 = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Ее график – кусок окружности с центром $(0;\ -1)$ и радиусом $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ниже прямой $y = 0$.

Вторую систему перепишем в виде

$$\begin{cases} -4 \le y \le 0, \\ y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Ее график – кусок параболы ниже прямой $y = 0$. Окружность и парабола пересекаются на оси Ox в точках $C = (\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$ и $D = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$. Объединение этих двух графиков является графиком первого уравнения данной системы.

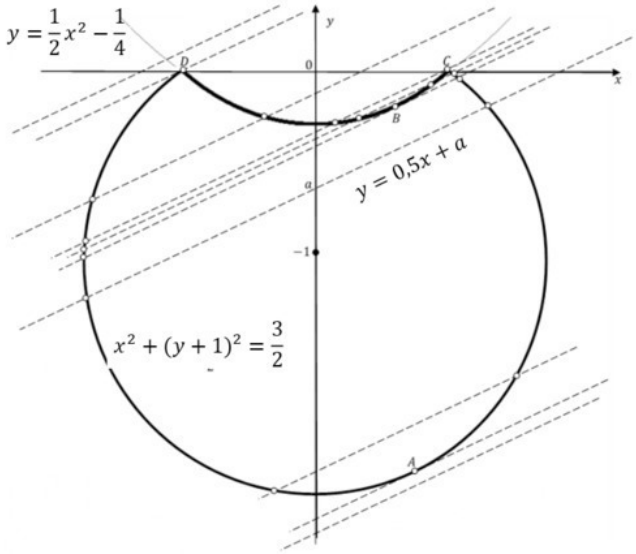


Рис.1.32

График второго уравнения (на рис.1.32 штриховая линия) –

прямая $y = 0{,}5x + a$ с угловым коэффициентом 0,5 и начальной ординатой a. При возрастании a от $-\infty$ до $+\infty$ прямая $y = 0{,}5x + a$ параллельно перемещается вверх. При этом количество точек ее пересечения с графиком первого уравнения – количество решений системы – меняется при переходе через точки ее касания с кусками окружности и параболы и точки пересечения кусков окружности и параболы.

Найдем точки касания прямой $y = 0{,}5x + a$ с окружностью. Окружность $x^2 + (y+1)^2 = \frac{3}{2}$ является объединением графиков двух функций $y = -1 - \sqrt{\frac{3}{2} - x^2}$ (нижняя полуокружность) и $y = -1 + \sqrt{\frac{3}{2} - x^2}$ (верхняя полуокружность).

Если $(x_0; y_0)$ – точка касания, то угловой коэффициент касательной к графику функции $y = y(x)$ равен значению производной $y'(x_0)$.

Для нижней полуокружности имеем $y'(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{3}{2} - x_0^2}} = 0{,}5 \Rightarrow$ $x_0 = \frac{\sqrt{30}}{10}$ (учтено, что $x_0 \geq 0$ в числителе левой части), $y_0 = -1 - \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{3}{10}} = -\frac{5+\sqrt{30}}{5} \Rightarrow$ точка касания $A = (\frac{\sqrt{30}}{10}; -\frac{5+\sqrt{30}}{5})$.

Для верхней полуокружности имеем $y'(x_0) = -\frac{x_0}{\sqrt{\frac{3}{2} - x_0^2}} = 0{,}5 \Rightarrow$ $x_0 = -\frac{\sqrt{30}}{10}$ (учтено, что $x_0 \leq 0$ в числителе левой части), $y_0 = -1 + \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{3}{10}} = \frac{\sqrt{30}-5}{5} > 0$, поэтому точка касания $(-\frac{\sqrt{30}}{10}; \frac{\sqrt{30}-5}{5})$ не принадлежит графику нашего уравнения.

Найдем точку касания прямой $y = 0{,}5x + a$ с параболой. Для нее $y'(x_0) = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 = 0{,}5 \Rightarrow x_0 = 0{,}5$, $y_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8} \Rightarrow$ точка касания $B = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{8})$.

Двигаясь по рисунку снизу вверх, прямая $y = 0{,}5x + a$ пересекает график первого уравнения первый раз в точке A – 1 раз, от точки A до точки B – 2 раза, проходя через точку B – 3 раза, от точки B до точки C – 4 раза, проходя через точку C – 3 раза, от точки C до точки D – 2 раза, проходя через точку D – 1 последний раз. Значит, ровно два или три решения система имеет, когда прямая $y = 0{,}5x + a$ проходит между точками A и B, затем между точками C и D. Найдем значения a, при которых прямая $y = 0{,}5x + a$ проходит через точки A, B, C, D.

Для точки $A = (\frac{\sqrt{30}}{10}; -\frac{5+\sqrt{30}}{5})$: $-\frac{5+\sqrt{30}}{5} = 0{,}5 \cdot \frac{\sqrt{30}}{10} + a \Rightarrow a = -\frac{4+\sqrt{30}}{4}$.

Для точки $B = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{8})$: $-\frac{1}{8} = 0{,}5 \cdot \frac{1}{2} + a \Rightarrow a = -\frac{3}{8}$.

Для точки $C = (\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$: $0 = 0{,}5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + a \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Для точки $D = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$: $0 = 0{,}5 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) + a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Делаем вывод: система имеет ровно два или три решения при

$$-\frac{4+\sqrt{30}}{4} < a \leq -\frac{3}{8},\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \leq a < \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{4+\sqrt{30}}{4}; -\frac{3}{8}\right] \cup \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Вариант 21

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2 + 2(a+3)x + (a+4) = 0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 2.

Решение.

При $a = 0$ уравнение $6x + 4 = 0$ имеет только один корень, поэтому значение $a = 0$ исключаем. При $a \neq 0$ корни $x_{1,2} = \frac{1}{a}\left(-(a+3) \pm \sqrt{(a+3)^2 - a(a+4)}\right) = \frac{1}{a}\left(-(a+3) \pm \sqrt{2a+9}\right)$. Два различных корня при $2a + 9 > 0 \Leftrightarrow a > -4{,}5$. Расстояние между корнями равно $|x_2 - x_1| = \frac{2}{|a|}\sqrt{2a+9}$. Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ a > -4{,}5, \\ \frac{2}{|a|}\sqrt{2a+9} > 2. \end{cases}$$

Так как $|a| > 0$, последнее неравенство можно умножить на $\frac{|a|}{2}$. Получим $\sqrt{2a+9} > |a| \Leftrightarrow a^2 - 2a - 9 < 0$. Этот трехчлен имеет корни $1-\sqrt{10}$ и $1+\sqrt{10}$, поэтому множество решений системы имеет вид $(1-\sqrt{10}; 0) \cup (0;\ 1+\sqrt{10})$.

Ответ: $a \in (1-\sqrt{10}; 0) \cup (0;\ 1+\sqrt{10})$.

Примечание. В конце сборника ответ неправильный.

Вариант 22 (повторяется вариант 21 с другими числовыми данными)

Вариант 23

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4x^2 + y^2, \\ 2x + y + 3z = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Запишем равносильную систему

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}(4x^2 + y^2 - x - y), \\ 2x + y + \frac{3}{2}(4x^2 + y^2 - x - y) = a. \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение, выделив полные квадраты из слагаемых, содержащих x, и из слагаемых, содержащих y:

$$(12x^2 + x) + (3y^2 - y) = 2a \Leftrightarrow 12(x^2 + x \cdot \tfrac{1}{12}) + 3\left(y^2 - y \cdot \tfrac{1}{3}\right) = 2a$$

$$\Leftrightarrow\ 12(x^2 + 2x \cdot \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{24^2} - \tfrac{1}{24^2}) + 3\left(y^2 - 2y \cdot \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6^2} - \tfrac{1}{6^2}\right) = 2a \Leftrightarrow$$

$$12(x + \tfrac{1}{24})^2 - \tfrac{1}{48} + 3(y - \tfrac{1}{6})^2 - \tfrac{1}{12} = 2a \Leftrightarrow$$

$$2(x + \tfrac{1}{24})^2 + 3(y - \tfrac{1}{6})^2 = 2a + \tfrac{5}{48}.$$

Если $2a + \frac{5}{48} < 0$, то решений нет. Если $2a + \frac{5}{48} > 0$, то имеется бесконечное множество решений (для каждого из

бесконечного множества значений x, удовлетворяющих неравенству $2a+\frac{5}{48}>2(x+\frac{1}{24})^2$, из равенства $3(y-\frac{1}{6})^2=2a+\frac{5}{48}-2(x+\frac{1}{24})^2$ можно получить два значения y).

Если $2a+\frac{5}{48}=0 \Leftrightarrow a=-\frac{5}{96}$, то имеется единственное решение: $(x,y)=\left(-\frac{1}{24};\frac{1}{6}\right)$. Так как z однозначно выражается через x и y, то данная система имеет единственное решение. Можно найти это решение, вычислив $z=\frac{1}{2}\left(4\left(-\frac{1}{24}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{24}-\frac{1}{6}\right)=-\frac{13}{288}$:

$$(x,y,z)=\left(-\frac{1}{24};\frac{1}{6};-\frac{13}{288}\right).$$

Ответ: $a=-\frac{5}{96}$.

Варианты 24, 25, 26, 27 (повторяется вариант 23 с другими числовыми данными)

Вариант 28

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|10\cdot 0{,}2^{1-x}-a|-|5^x+2a|=0{,}04^{-x}$$

имеет ровно два неотрицательных решения.

Решение.

Учитывая, что $10\cdot 0{,}2^{1-x}=2\cdot 5^x$, $0{,}04^{-x}=5^{2x}$, положим $5^x=t$ $(t>0)$. Тогда $|2t-a|-|t+2a|=t^2$. Поскольку показательная функция обратима (монотонна на промежутке $(-\infty;+\infty)$), то при каждом значении a между множествами корней данного уравнения и нового имеется взаимно однозначное соответствие: каждому корню x данного уравнения соответствует один корень $t=5^x$ нового уравнения, и каждому корню t нового уравнения соответствует один корень $x=\log_5 t$ данного уравнения.

Так как $x\geq 0\Rightarrow 5^x\geq 1$, то нас интересуют корни $t\geq 1$ уравнения

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2 \qquad (1)$$

Следовательно, надо найти все значения a, при каждом из которых это уравнение имеет ровно два различных корня $t \geq 1$.

Будем решать графически, рассматривая данное уравнение как уравнение вида $f(t,a) = 0$ с двумя неизвестными t и a. Множество его решений (t,a) на координатной плоскости $0ta$ представляет собой график уравнения. При фиксированном числовом значении $a = k$ получается уравнение $f(t,k) = 0$ с одним неизвестным t. Его корнями являются первые координаты решений (t,k) уравнения $f(t,a) = 0$. На рис.1.33 показаны корни t_1, t_2, t_3. Количество корней равно количеству пересечений графика с прямой $a = k$.

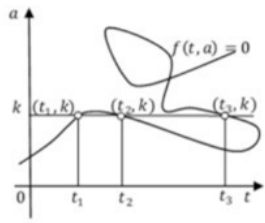


Рис.1.33

Имеются 4 варианта раскрытия модулей в уравнении (1).

V_1. $\begin{cases} 2t - a \geq 0, \\ t + 2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2t, \\ a \geq -\frac{t}{2} \end{cases}$ – угол, содержащий положительную полуось Ot.

V_2. $\begin{cases} 2t - a < 0, \\ t + 2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2t, \\ a \geq -\frac{t}{2} \end{cases}$ – угол, содержащий положительную полуось Oa.

V_3. $\begin{cases} 2t - a < 0, \\ t + 2a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2t, \\ a < -\frac{t}{2} \end{cases}$ – угол, содержащий отрицательную полуось Ot.

V_4. $\begin{cases} 2t - a \geq 0, \\ t + 2a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2t, \\ a < -\frac{t}{2} \end{cases}$ – угол, содержащий отрицательную полуось Oa.

Запишем уравнение (1) без модулей в каждой области.

V_1: $2t - a - t - 2a = t^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}(t^2 - t)$,

V_2: $-2t + a - t - 2a = t^2 \Leftrightarrow a = -t^2 - 3t$.

V_3: $-2t + a + t + 2a = t^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}(t^2 + t)$,

V_4: $2t - a + t + 2a = t^2 \Leftrightarrow a = t^2 - 3t$.

График уравнения (1) при $t > 0$ представляет собой объединение двух кусков парабол:

параболы $a = -\frac{1}{3}(t^2 - t)$ с вершиной $D = (\frac{1}{2}; \frac{1}{12})$ в области V_1 и параболы $a = t^2 - 3t$ с вершиной $A = (\frac{3}{2}; -\frac{9}{4})$ в области V_4. Эти куски пересекаются в начале координат и в точке $C = (\frac{5}{2}; -\frac{5}{4})$ на прямой $a = -\frac{t}{2}$. Прямая $t = 1$ пересекает их в точках $E = (1; 0)$ и $B = (1; -2)$.

При разных значениях k прямая $a = k$ пересекает график разное число раз и соответственно имеем разное число корней.

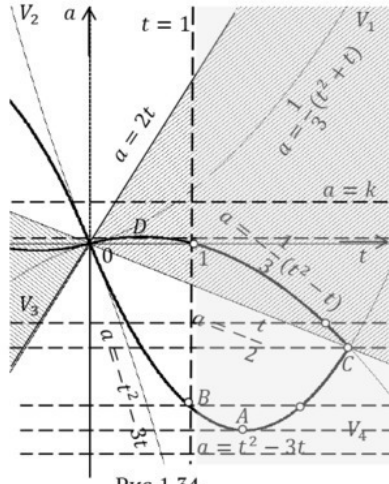


Рис.1.34

Из рис.1.34 видим, что прямая $a = k$ пересекает график при $t \geq 1$ ровно два раза, когда она проходит между точками A и B

(проходя через саму точку A – один раз, через точку B – два раза). По координатам точек A и B видим, что прямая $a = k$ через точки A и B проходит соответственно при $k = -\frac{9}{4}$ и -2. Следовательно, ровно два корня $t \geq 1$ имеем при $a \in (-\frac{9}{4}; -2]$.

Ответ: $-\frac{9}{4} < a \leq -2$.

Вариант 29

Найдите все положительные значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{a+x^2+2\log_5(a^2-4a+5)}{30\sqrt{17x^4+5x^2}+a+1+\log_5^2(a^2-4a+5)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение.

Решение (как в варианте 17, но исключается значение $a = 0$).

Вариант 30

Найдите все значения k, при каждом из которых уравнение

$$\frac{6k-(2-3k)\cos t}{\sin t-\cos t} = 2$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Решение.

При $t = \frac{\pi}{4} \in [0; \frac{\pi}{2}]$. знаменатель обращается в нуль, поэтому уточняем задачу: надо найти все значения k, при каждом из которых уравнение $\frac{6k-(2-3k)\cos t}{\sin t-\cos t} = 2$ имеет хотя бы одно решение на множестве $[0; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$. Преобразуем уравнение:

$$6k - 2\cos t + 3k\cos t = 2\sin t - 2\cos t \Leftrightarrow k = \frac{2\sin t}{6+3\cos t}$$

и сформулируем задачу иначе: найти все значения k, каждое из которых является значением функции $f(t) = \frac{2\sin t}{6+3\cos t}$ хотя бы при одном значении $t \in [0; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$, другими словами, найти множество значений функции $k = f(t) = \frac{2\sin t}{6+3\cos t}$ на

множестве $[0; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.

Эта функция определена на всем отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$ и возрастает на этом отрезке, так как ее производная $k' = \frac{12\cos t+6}{(6+3\cos t)^2} > 0$. Поскольку $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$, множеством значений функции на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$ является отрезок $[0; \frac{1}{3}]$. Исключив значение $k = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\sqrt{2}-2}{21}$, получаем искомое множество значений функции на множестве $[0; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$. Это множество

$$[0; \frac{4\sqrt{2}-2}{21}) \cup (\frac{4\sqrt{2}-2}{21}; \frac{1}{3}].$$

Ответ: $0 \le k < \frac{4\sqrt{2}-2}{21}$, $\frac{4\sqrt{2}-2}{21} < k \le \frac{1}{3}$.

Вариант 31

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + 3x + a$$

не имеет корней.

Решение.

Обозначим $4x^2 = t_1$, $3x + a = t_2$. Тогда уравнение запишется в виде $t_1^3 + t_1 = t_2^3 + t_2$. Это равенство можно рассматривать как равенство значений функции $f(t) = t^3 + t$ при $t = t_1$ и $t = t_2$. Эта функция на промежутке $(-\infty; +\infty)$ имеет положительную производную $f'(t) = 3t^2 + 1$ и потому возрастает. Следовательно, $f(t_1) = f(t_2)$ тогда и только тогда, когда $t_1 = t_2$, так что $t_1^3 + t_1 = t_2^3 + t_2 \Leftrightarrow t_1 = t_2$. Значит, данное уравнение равносильно уравнению $4x^2 = 3x + a$. Переписав квадратное уравнение в виде

$$4x^2 - 3x - a = 0,$$

находим, что его дискриминант $D = 9 + 16a < 0$ при $a < -\frac{9}{16}$. Делаем вывод: при $a < -\frac{9}{16}$ это уравнение и равносильное ему данное уравнение не имеют корней.

Ответ: $-\infty < a < -\frac{9}{16}$.

Вариант 32

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (a - 2x)^3 + 9x^2 + 3a = 6x$$

не имеет корней.

Решение.

Перенесем слагаемые, содержащие a, в правую часть уравнения: $27x^6 + 9x^2 = (2x - a)^3 + 6x - 3a$. Обращаем внимание на то, что во втором слагаемом правой части можно вынести за скобки 3 и записать ее в виде $(2x - a)^3 + 3(2x - a)$ как куб числа плюс утроенное это число. Замечаем, что и левую часть можно представить как куб числа $3x^2$ плюс утроенное число $3x^2$. Итак, запишем данное уравнение в виде

$$(3x^2)^3 + 3(3x^2) = (2x - a)^3 + 3(2x - a).$$

Обозначим $3x^2 = t_1$, $2x - a = t_2$. Тогда уравнение запишется в виде $t_1^3 + 3t_1 = t_2^3 + 3t_2$ и решение заканчиваем как в варианте 31.

Вариант 33

Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 2a + 3)^2 + (y - a)^2 = 2{,}25, \\ (x + 3)^2 + (y - a)^2 = a^2 + 2a + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Записав систему в виде $\begin{cases} (x - (2a - 3))^2 + (y - a)^2 = (\frac{3}{2})^2, \\ (x - (-3))^2 + (y - a)^2 = (a + 1)^2, \end{cases}$ в первой строке узнаем уравнение окружности с центром $C_1 = (2a - 3; a)$ и радиусом $R_1 = \frac{3}{2}$, а во второй строке – уравнение окружности с центром $C_2 = (-3; a)$ и радиусом $R_2 = |a + 1|$ (в системе координат Oxy). Графически решениями $(x; y)$ данной системы являются точки пересечения этих окружностей. Единственное решение имеет место при внутреннем или внешнем касании окружностей (рис.1.35). При внутреннем касании расстояние между центрами $d(C_1, C_2)$

равно модулю разности радиусов, а при внешнем касании – сумме радиусов, поэтому имеем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} d(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2)=|R_1-R_2|, \\ d(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2)=R_1+R_2. \end{array}\right.$$

Здесь $d(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2)=\sqrt{(2a-3-(-3))^2+(a-a)^2}=2|a|$, $|R_1-R_2|=\left|\frac{3}{2}-|a+1|\right|$, $R_1+R_2=\frac{3}{2}+|a+1|$, так что совокупность имеет вид

$$\left[\begin{array}{l} 2|a|=\left|\frac{3}{2}-|a+1|\right|, \\ 2|a|=\frac{3}{2}+|a+1|. \end{array}\right.$$

Рассмотрим первое уравнение при $a\in(0;+\infty)$:

$$2a=\left|\frac{3}{2}-a-1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a=\frac{3}{2}-a-1, \\ 2a=-\frac{3}{2}+a+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} a=\frac{1}{6}, \\ a=-\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$ Решение $a=\frac{1}{6}$.

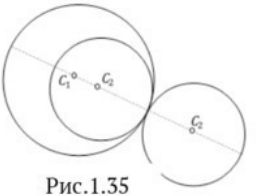


Рис.1.35

Второе уравнение при $a\in(0;+\infty)$: $2a=\frac{3}{2}+a+1 \Leftrightarrow a=\frac{5}{2}$. Решение $a=\frac{5}{2}$..

Ответ: $\frac{1}{6}$, 2,5.

Вариант 34

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5(x^2)-a|-|\log_5 x+2a|=(\log_5 x)^2$$

имеет ровно четыре решения.

Решение.

Положим $\log_5 x=t$. Тогда $|2t-a|-|t+2a|=t^2$. Поскольку логарифм – обратимая функция (монотонна на промежутке $(0;+\infty)$), то при каждом значении a между множествами корней данного уравнения и нового имеется взаимно однозначное соответствие: каждому корню x данного уравнения соответствует один корень $t=\log_5 x$ нового

уравнения, и каждому корню t нового уравнения соответствует один корень $x = 5^t$ данного уравнения. Следовательно, надо найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре корня.

Будем решать графически, рассматривая данное уравнение как уравнение вида $f(t,a) = 0$ с двумя неизвестными t и a. Множество его решений (t,a) на координатной плоскости $0ta$ представляет собой график уравнения. При фиксированном числовом значении $a = k$ получается уравнение $f(t,k) = 0$ с одним неизвестным t. Его корнями являются первые координаты решений (t,k) уравнения $f(t,a) = 0$. На рис.1.36 показаны корни t_1, t_2, t_3. Количество корней равно количеству пересечений графика с прямой $a = k$.

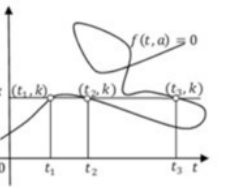


Рис.1.36

Имеются 4 варианта раскрытия модулей в уравнении (1).

V_1. $\begin{cases} 2t - a \geq 0, \\ t + 2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2t, \\ a \geq -\frac{t}{2} \end{cases}$ – угол, содержащий положительную полуось Ot.

V_2. $\begin{cases} 2t - a < 0, \\ t + 2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2t, \\ a \geq -\frac{t}{2} \end{cases}$ – угол, содержащий положительную полуось Oa.

V_3. $\begin{cases} 2t - a < 0, \\ t + 2a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2t, \\ a < -\frac{t}{2} \end{cases}$ – угол, содержащий отрицательную полуось Ot.

V_4. $\begin{cases} 2t - a \geq 0, \\ t + 2a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2t, \\ a < -\frac{t}{2} \end{cases}$ – угол, содержащий отрицательную полуось Oa.

Запишем уравнение (1) без модулей в каждой области.

V_1: $2t - a - t - 2a = t^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}(t^2 - t)$,

$V_2: -2t + a - t - 2a = t^2 \Leftrightarrow a = -t^2 - 3t,$

$V_3: -2t + a + t + 2a = t^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}(t^2 + t),$

$V_4: 2t - a + t + 2a = t^2 \Leftrightarrow a = t^2 - 3t.$

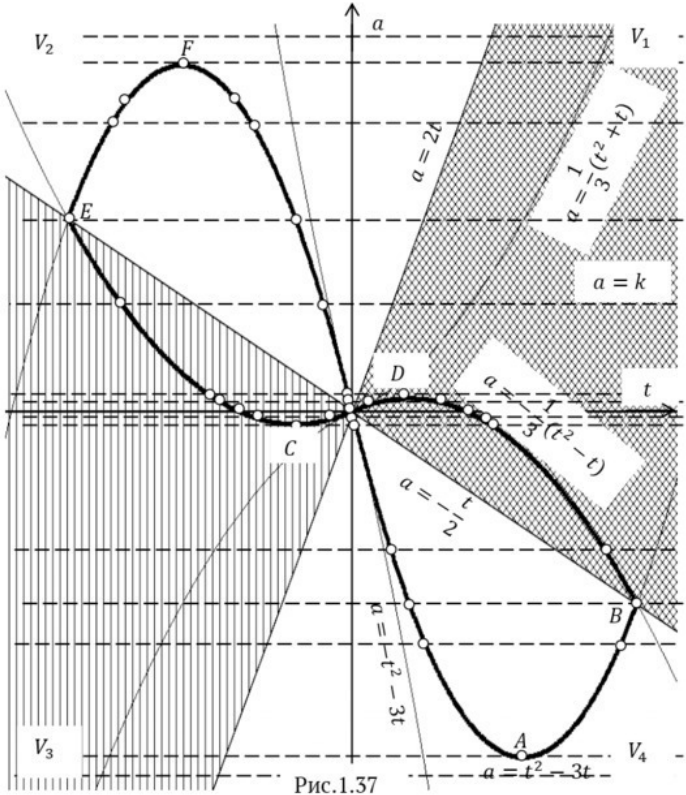


Рис.1.37

График уравнения (1) представляет собой объединение четырех кусков парабол с вершинами $D = (\frac{1}{2}; \frac{1}{12})$ в V_1, $F =$

$(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4})$ в V_2, $C = (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{12})$ в V_3 и $A = (\frac{3}{2}; -\frac{9}{4})$ в V_4.
Куски пересекаются в начале координат и в точках $B = (\frac{5}{2}; -\frac{5}{4})$ и $E = (-\frac{5}{2}; \frac{5}{4})$ на прямой $a = -\frac{t}{2}$.

При разных значениях k прямая $a = k$ пересекает график разное число раз и соответственно имеем разное число корней.

Из рис.1.37 видим, что прямая $a = k$ пересекает график ровно четыре раза, когда она проходит между точкой C и началом координат, а затем между началом координат и точкой D (проходя через сами точки C и D и начало координат пересекает три раза). По координатам точек C и D видим, что прямая $a = k$ проходит через точки C и D соответственно при $k = -\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{12}$. Следовательно, ровно 4 корня имеем при $a \in \left(-\frac{1}{12}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right)$.

Ответ: $-\frac{1}{12} < a < 0$ или $0 < a < \frac{1}{12}$.

Вариант 35

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\log_{0,5}(x^2) - a\right| - \left|\log_{0,5} x + 2a\right| = (\log_{0,5} x)^2$$

имеет хотя бы одно решение, меньшее 2.

Решение.

Положим $\log_{0,5} x = t$. Тогда $|2t - a| - |t + 2a| = t^2$. Поскольку логарифм – обратимая функция (монотонна на промежутке $(0; +\infty)$), то при каждом значении a между множествами корней данного уравнения и нового имеется взаимно однозначное соответствие: каждому корню x данного уравнения соответствует один корень $t = \log_{0,5} x$ нового уравнения, и каждому корню t нового уравнения соответствует один корень $x = 0{,}5^t$ данного уравнения.

Корню $x < 2$ данного уравнения соответствует корень $t = \log_{0,5} x > \log_{0,5} 2 = -1$ нового уравнения. Следовательно, надо найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2 \qquad (1)$$

имеет хотя бы один корень $t > -1$.

Решаем графически, рассматривая данное уравнение как уравнение вида $f(t,a)=0$ с двумя неизвестными t и a. Множество его решений (t,a) на координатной плоскости $0ta$ является графиком уравнения. При фиксированном значении $a=k$ получается уравнение $f(t,k)=0$ с одним неизвестным t. Его корнями являются первые координаты решений (t,k) уравнения $f(t,a)=0$. На рис.1.38 показаны корни t_1, t_2, t_3. Количество корней равно количеству пересечений графика с прямой $a=k$.

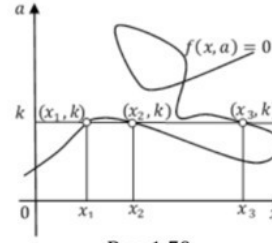


Рис.1.38

Имеются 4 варианта раскрытия модулей в уравнении (1).

V_1. $\begin{cases}2t-a\geq 0,\\ t+2a\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\leq 2t,\\ a\geq -\frac{t}{2}\end{cases}$ – угол, содержащий положительную полуось Ot.

V_2. $\begin{cases}2t-a< 0,\\ t+2a\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a> 2t,\\ a\geq -\frac{t}{2}\end{cases}$ – угол, содержащий положительную полуось Oa.

V_3. $\begin{cases}2t-a< 0,\\ t+2a< 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a> 2t,\\ a< -\frac{t}{2}\end{cases}$ – угол, содержащий отрицательную полуось Ot.

V_4. $\begin{cases}2t-a\geq 0,\\ t+2a< 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\leq 2t,\\ a< -\frac{t}{2}\end{cases}$ – угол, содержащий отрицательную полуось Oa.

Запишем уравнение (1) без модулей в каждой области.

V_1: $2t-a-t-2a=t^2\Leftrightarrow a=-\frac{1}{3}(t^2-t)$,

V_2: $-2t+a-t-2a=t^2\Leftrightarrow a=-t^2-3t$,

V_3: $-2t+a+t+2a=t^2\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}(t^2+t)$,

V_4: $2t-a+t+2a=t^2\Leftrightarrow a=t^2-3t$.

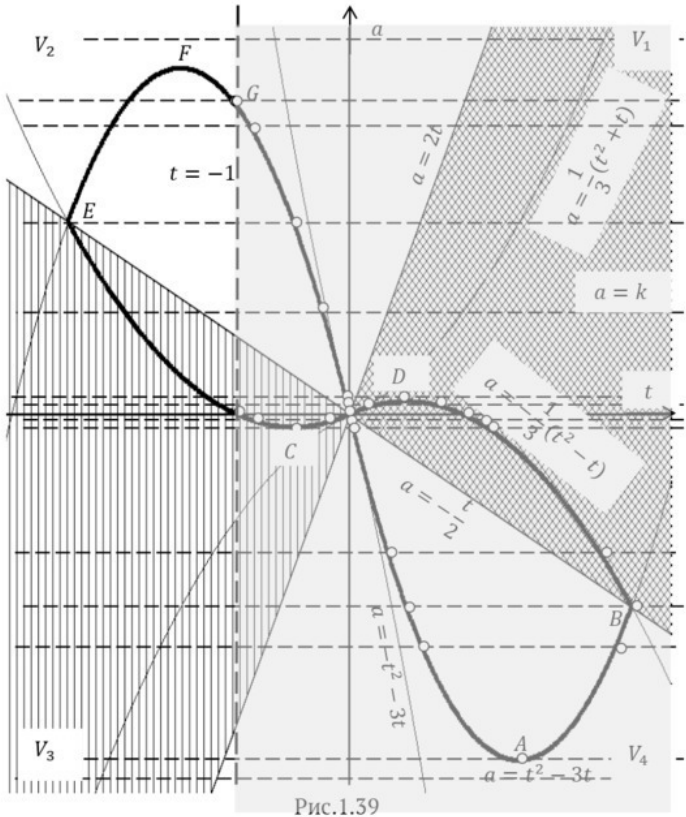


Рис.1.39

График уравнения (1) представляет собой объединение четырех кусков парабол с вершинами $D=(\frac{1}{2};\frac{1}{12})$ в V_1, $F=(-\frac{3}{2};\frac{9}{4})$ в V_2, $C=(-\frac{1}{2};-\frac{1}{12})$ в V_3 и $A=(\frac{3}{2};-\frac{9}{4})$ в V_4.

Куски пересекаются в начале координат и в точках $B = (\frac{5}{2}; -\frac{5}{2})$ и $E = (-\frac{5}{2}; \frac{5}{4})$ на прямой $a = -\frac{t}{2}$. Прямая $t = -1$ пересекает два левых куска в точках $G = (-1; 2)$ и $H = (-1; 0)$.

При разных значениях k прямая $a = k$ пересекает график разное число раз и соответственно имеем разное число корней.

Из рис.1.39 видим, что прямая $a = k$ пересекает график при $t > -1$ хотя бы один раз, когда она проходит между точкой A и точкой G (проходя через саму точку G, не пересекает).

По координатам точек A и G видим, что прямая $a = k$ проходит через точки A и G соответственно при $k = -\frac{9}{4}$ и 2. Следовательно, хотя бы один корень $t > -1$ имеем при $a \in [-\frac{9}{4}; 2)$.

Ответ: $-\frac{9}{4} \le a < 2$.

Вариант 36

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 11|x + 2| + 3\sqrt{x^2 + 4x + 13} = 5a + 2|x - 2a + 2|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение.

Положим $x + 2 = t$. Получим уравнение

$$a^2 + 11|t| + 3\sqrt{t^2 + 9} = 5a + 2|t - 2a|.$$

При каждом значении a между множествами корней данного уравнения и нового имеется взаимно однозначное соответствие: каждому корню x данного уравнения соответствует один корень $t = x + 2$ нового уравнения, и каждому корню t нового уравнения соответствует один корень $x = t - 2$ данного уравнения. Поэтому задача сформулируется так: найти все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2 + 11|t| + 3\sqrt{t^2 + 9} = 5a + 2|t - 2a|$ имеет хотя бы один корень. Отметим сразу, что при $a = 0$ нет корней: $9|t| + 3\sqrt{t^2 + 9} \neq 0$, и далее считаем $a \neq 0$. Перепишем уравнение в виде

$$3\sqrt{t^2 + 9} = 2|t - 2a| - 11|t| + 5a - a^2.$$

Оно означает равенство функций

$$f(t) = 3\sqrt{t^2+9} \text{ и } g(t) = 2|t-2a| - 11|t| + 5a - a^2.$$

Производная $f'(t) = \frac{3t}{\sqrt{t^2+9}}$ отрицательна при $t < 0$ и положительна при $t > 0$. Поэтому $f(0) = 9$ является наименьшим значением функции на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Рассмотрим функцию $g(t)$ при $t < 0$ и $t > 0$. Будем интересоваться ее возрастанием и убыванием.

При $t < 0$ имеем $g(t) = 2|t-2a| + 11t + 5a - a^2$. В зависимости от значения a будет $t - 2a < 0$ или $t - 2a \geq 0$. Соответственно будет $g(t) = -2t + 4a + 11t + 5a - a^2 = 9t + 9a - a^2$ или $g(t) = 2t - 4a + 11t + 5a - a^2 = 13t + a - a^2$. Значит, график представляет собой часть прямой с положительным угловым коэффициентом $k = 9$ или $k = 13$, так что функция $g(t)$ на промежутке $(-\infty; 0)$ возрастает (при любом значении a).

При $t > 0$ имеем $g(t) = 2|t-2a| - 11t + 5a - a^2$. В зависимости от значения a будет $t - 2a < 0$ или $t - 2a \geq 0$. Соответственно будет $g(t) = -2t + 4a - 11t + 5a - a^2 = -13t + 9a - a^2$ или $g(t) = 2t - 4a - 11t + 5a - a^2 = -9t + a - a^2$. Значит, график представляет собой часть прямой с отрицательным угловым коэффициентом $k = -9$ или $k = -13$, так что функция $g(t)$ на промежутке $(0; +\infty)$ убывает (при любом a).

Делаем вывод: $g(0) = 4|a| + 5a - a^2$ является наибольшим значением функции $g(t)$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Уравнение имеет хотя бы один корень, когда графики функций $f(t)$ и $g(t)$ пересекаются хотя бы в одной точке, а это имеет место тогда и только тогда, когда $g(0) \geq f(0)$, то есть когда $4|a| + 5a - a^2 \geq 9$. Это неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0, \\ a^2 - a + 9 \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0, \\ a^2 - 9a + 9 \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система не имеет решений (дискриминант квадратного трехчлена отрицателен). Вторая система имеет решения $a \in [\frac{9-3\sqrt{5}}{2}; \frac{9+3\sqrt{5}}{2}]$.

Ответ: $a \in [\frac{9-3\sqrt{5}}{2}; \frac{9+3\sqrt{5}}{2}]$.

Вариант 37

Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции

$$f(x) = |x - a| - x^2$$

не меньше 1.

Решение.

Будем решать графически. Если $x \le a$, то $f(x) = a - x - x^2 = -x^2 - x + a$, а если $x \ge a$, то $f(x) = x - a - x^2 = -x^2 + x - a$. Следовательно, при фиксированном значении a график функции представляет собой объединение куска параболы $y = -x^2 - x + a$ на промежутке $(-\infty; a]$ с куском параболы $y = -x^2 + x - a$ на промежутке $[a; +\infty)$. Эти куски стыкуются в точке $(a; -a^2)$. Как известно, на промежутке $(-\infty; +\infty)$ квадратный трехчлен $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ при $A < 0$ имеет наибольшее значение при $x = -\frac{B}{2A}$, и этим значением является ордината вершины параболы $y = Ax^2 + Bx + C$.

Если на графике присутствует одна вершина какой-либо параболы, то ее ордината и является наибольшим значением функции $f(x)$ Если присутствуют две вершины, то наибольшим значением функции является большая из их ординат (см. рис.1.40).

Найдем вершины парабол. Для $y = -x^2 - x + a$ имеем $A = -1, B = -1$, абсцисса вершины M равна $-\frac{B}{2A} = -\frac{1}{2}$, ордината равна $-\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-\frac{1}{2}) + a = \frac{1}{4} + a$. Получили $M = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4} + a\right)$. Для $y = -x^2 + x - a$ имеем $A = -1, B = 1$, абсцисса вершины N

равна $-\frac{B}{2A}=\frac{1}{2}$, ордината равна $-(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}-a=\frac{1}{4}-a$. Получили $N=\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}-a\right)$.

Рассмотрим случаи $a<-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\le a\le\frac{1}{2}$, $a>\frac{1}{2}$.

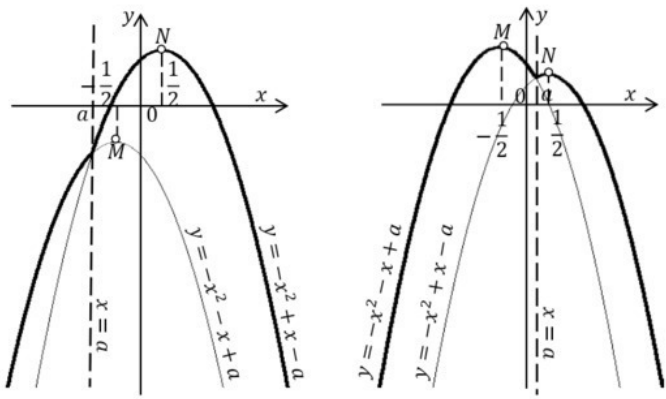


Рис.1.40

При $a<-\frac{1}{2}$ на графике присутствует одна вершина $N=\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}-a\right)$, поэтому наибольшее значение $f(x)$ равно $\frac{1}{4}-a$. Неравенство $\frac{1}{4}-a\ge 1$ выполняется при $a\le-\frac{3}{4}$.

При $-\frac{1}{2}\le a\le\frac{1}{2}$ на графике присутствуют обе вершины $M=\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}+a\right)$ и $N=\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}-a\right)$, так что одно из чисел $\frac{1}{4}+a$ и $\frac{1}{4}-a$ является наибольшим значением $f(x)$. Но оба они меньше 1. В самом деле, $-\frac{1}{2}\le a\Rightarrow -a\le\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}-a\le\frac{1}{4}+\frac{1}{2}<1$, $a\le\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}+a\le\frac{1}{4}+\frac{1}{2}<1$.

При $a>\frac{1}{2}$ на графике присутствует одна вершина $M=\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}+a\right)$, поэтому наибольшее значение $f(x)$ равно $\frac{1}{4}+a$.

Неравенство $\frac{1}{4} + a \geq 1$ выполняется при $a \geq \frac{3}{4}$.

Ответ: $a \leq -0{,}75,\ a \geq 0{,}75$.

Вариант 38

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 7|x+1| + 5\sqrt{x^2+2x+5} = 2a + 3|x - 4a + 1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение (как в варианте 36, но замена $x + 1 = t$).

Вариант 39

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

Решение.

Будем решать графически, рассматривая данное уравнение как уравнение вида $f(x,a) = 0$ с двумя неизвестными x и a. Множество его решений (x,a) на координатной плоскости $0xa$ представляет собой график уравнения. При фиксированном числовом значении a получается уравнение $f(x,a) = 0$ с одним неизвестным x. Его корнями являются первые координаты решений (x,a) уравнения $f(x,a) = 0$. На рис.1.41 показаны корни x_1, x_2, x_3.

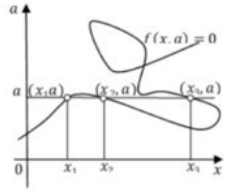


Рис.1.41

Первое и второе подмодульные выражения обращаются в нуль в точках (x,a), лежащих соответственно на параболе $x = a^2 - 4a + 2$ с вершиной $A(-2;\ 2)$ и на параболе $x = a^2 - 2a - 3$ с вершиной $B(-4; 1)$.

(Как известно, ордината вершины параболы $x = Aa^2 + Ba + C$ равна $-\frac{B}{2A}$. Для первой параболы $-\frac{B}{2A} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2$, абсцисса $2^2 - 4\cdot 2 + 2 = -2$. Таким же образом вычисляются координаты вершины второй параболы).

Обе параболы обращены ветвями вправо и пересекаются в

точке $C = (-1,75; 2,5)$.

Так как по условию $2a - 5 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 2,5$, то график уравнения расположен выше прямой $a = 2,5$. Полуплоскость $a \geq 2,5$ разбивается кусками парабол на три области:

$\begin{cases} a \geq 2,5, \\ x < a^2 - 4a + 2 \end{cases}$; $\begin{cases} a \geq 2,5, \\ a^2 - 4a + 2 \leq x \leq a^2 - 2a - 3 \end{cases}$; $\begin{cases} a \geq 2,5, \\ x > a^2 - 2a - 3 \end{cases}$.

График данного уравнения получаем как объединение кусков графика в этих областях.

В первой области в силу того, что $a^2 - 4a + 2 \leq a^2 - 2a - 3 \Rightarrow x < a^2 - 2a - 3$, уравнение имеет вид $-x + a^2 - 4a + 2 - x + a^2 - 2a - 3 = 2a - 5 \Leftrightarrow -x + a^2 - 4a + 2 = 0 \Leftrightarrow x = a^2 - 4a + 2$. Это уравнение не имеет решений, так как во всех точках (x, a) области налицо строгое неравенство. Значит, эта область не содержит точек графика данного уравнения.

Во второй области все ее точки (x, a) являются решениями данного уравнения: $x - a^2 + 4a - 2 - x + a^2 - 2a - 3 = 2a - 5 \Leftrightarrow 0 = 0$. Значит, вся вторая область представляет собой часть графика данного уравнения (это редко встречающийся случай, когда графиком уравнения является не линия, а целая область плоскости).

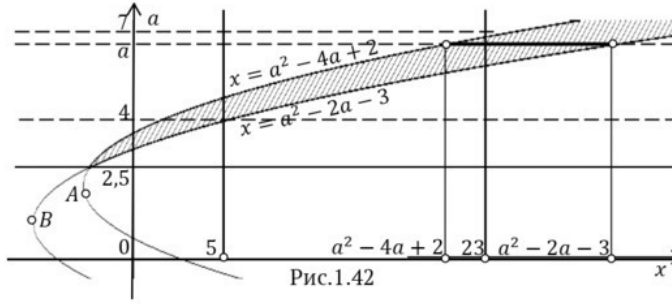


Рис.1.42

В третьей области в силу того, что $a^2 - 2a - 3 \geq a^2 - 4a + 2 \Rightarrow x > a^2 - 4a + 2$, уравнение имеет вид

$$x - a^2 + 4a - 2 + x - a^2 + 2a + 3 = 2a - 5 \Leftrightarrow$$

$$x - a^2 + 2a + 3 = 0 \Leftrightarrow x = a^2 - 2a - 3.$$

Это уравнение не имеет решений, так как во всех точках (x, a) области налицо строгое неравенство. Значит, эта область не содержит точек графика данного уравнения.

Итак, графиком данного уравнения является вторая область $\begin{cases} a \geq 2{,}5, \\ a^2 - 4a + 2 \leq x \leq a^2 - 2a - 3 \end{cases}$ (на рис.1.42 она закрашена. По необходимости масштаб на оси $0x$ искажен). При фиксированном значении $a \geq 2{,}5$ множеством корней x данного уравнения является отрезок $[a^2 - 4a + 2;\ a^2 - 2a - 3]$. Хотя бы один корень на отрезке $[5;\ 23]$ содержится, когда он пересекается с отрезком корней, то есть когда

$$\begin{cases} a \geq 2{,}5, \\ 23 \geq a^2 - 4a + 2, \\ 5 \leq a^2 - 2a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2{,}5, \\ a^2 - 4a - 21 \leq 0, \\ a^2 - 2a - 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2{,}5, \\ -3 \leq a \leq 7, \\ \left[\begin{array}{l} a \leq -2, \\ a \geq 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq a \leq 7.$$

Ответ: $4 \leq a \leq 7$.

Вариант 40

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$$

имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4;\ 19)$.

Решение.

Будем решать графически, рассматривая это уравнение как уравнение вида $f(x, a) = 0$ с двумя неизвестными x и a. Множество его решений (x, a) на координатной плоскости $0xa$ представляет собой график уравнения. При фиксированном числовом значении a получается уравнение $f(x, a) = 0$ с одним неизвестным x. Его корнями являются первые координаты

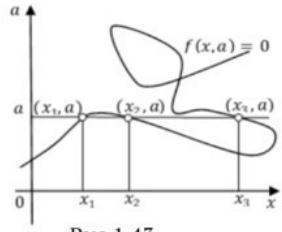


Рис.1.43

решений (x, a) уравнения $f(x, a) = 0$. На рис.1.43 показаны корни x_1, x_2, x_3.

Первое и второе подмодульные выражения обращаются в нуль в точках (x, a), лежащих соответственно на параболе $x = a^2 - 3a + 1$ с вершиной $A = (-1{,}25; 1{,}5)$ и на параболе $x = a^2 - a - 2$ с вершиной $B = (-2{,}25;\ 0{,}5)$ (Как известно, ордината вершины параболы $x = Aa^2 + Ba + C$ равна $-\frac{B}{2A}$. Для первой параболы $-\frac{B}{2A} = -\frac{-3}{2\cdot 1} = 1{,}5$, абсцисса $1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 1 = -1{,}25$. Таким же образом вычисляются координаты вершины второй параболы).

Обе параболы обращены ветвями вправо и пересекаются в точке A.

Так как по условию $2a - 3 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 1{,}5$, то график уравнения расположен выше прямой $a = 1{,}5$. Полуплоскость $a \geq 1{,}5$ разбивается кусками парабол на три области:
$\begin{cases} a \geq 1{,}5, \\ x < a^2 - 3a + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} a \geq 1{,}5, \\ a^2 - 3a + 1 \leq x \leq a^2 - a - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} a \geq 1{,}5, \\ x > a^2 - a - 2 \end{cases}$.
График данного уравнения получаем как объединение кусков графика в этих областях.

В первой области в силу того, что $a^2 - 3a + 1 \leq a^2 - a - 2 \Rightarrow x < a^2 - a - 2$, уравнение имеет вид $-x + a^2 - a - 2 - x + a^2 - 3a + 1 = 2a - 3 \Leftrightarrow -x + a^2 - 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow x = a^2 - 3a + 1$. Это уравнение не имеет решений, так как во всех точках (x, a) области налицо строгое неравенство. Значит, эта область не содержит точек графика данного уравнения.

Во второй области все ее точки (x, a) являются решениями данного уравнения: $-x + a^2 - a - 2 + x - a^2 + 3a - 1 = 2a - 3 \Leftrightarrow 0 = 0$. Значит, вся вторая область представляет собой часть графика данного уравнения (это редко встречающийся случай, когда графиком уравнения является не линия, а целая область плоскости).

В третьей области в силу того, что $a^2 - a - 2 \geq a^2 - 3a + 1 \Rightarrow x > a^2 - 3a + 1$, уравнение имеет вид $x - a^2 + a + 2 + x - a^2 + 3a - 1 = 2a - 3 \Leftrightarrow x - a^2 + a + 2 = 0 \Leftrightarrow x = a^2 - a - 2$. Это

уравнение не имеет решений, так как во всех точках (x, a) области налицо строгое неравенство. Значит, эта область не содержит точек графика данного уравнения.

Итак, графиком данного уравнения является вторая область $\begin{cases} a \geq 1{,}5, \\ a^2 - 3a + 1 \leq x \leq a^2 - a - 2 \end{cases}$ (на рис.1.44 закрашена. По необходимости масштаб на оси $0x$ искажен).

При фиксированном значении $a \geq 1{,}5$ множеством корней x

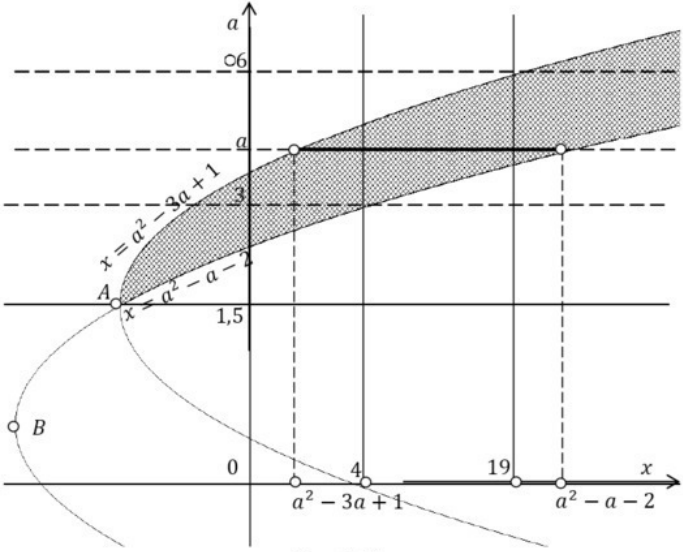


Рис.1.44

данного уравнения является отрезок $[a^2 - 3a + 1;\ a^2 - a - 2]$. Ни один из корней не принадлежит интервалу $(4; 19)$, когда он не пересекается с отрезком корней, то есть когда

$$\begin{cases} a \geq 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} a^2-3a+1 \geq 19, \\ a^2-a-2 \leq 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} a^2-3a-18 \geq 0, \\ a^2-a-6 \leq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a \leq -3, \\ a \geq 6, \end{array}\right. \\ -2 \leq a \leq 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} a \geq 6, \\ 1{,}5 \leq a \leq 3 \end{array}\right.$$

Ответ: $1{,}5 \leq a \leq 3$ и $a \geq 6$.

Вариант 41

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin 2\sqrt{\pi a x - x^2} - \sin\sqrt{\pi a x - x^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

При $a = 0$ уравнение имеет вид $\sin 2\sqrt{-x^2} - \sin\sqrt{-x^2} = 0$ и имеет единственный корень $x = 0$. Поэтому далее считаем, что $a \neq 0$.

Будем решать графически. Сначала найдем ОДЗ: $\pi a x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - \pi a x \leq 0$. Это неравенство выполняется на отрезке между корнями квадратного трехчлена $x = 0$ и $x = \pi a$. При $a > 0$ на отрезке $[0; \pi a]$, а при $a < 0$ на отрезке $[\pi a; 0]$.

Случай $a > 0$. Обозначим $\sqrt{\pi a x - x^2} = t$. Тогда

$$\sin 2t - \sin t = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{2t-t}{2}\cos\frac{2t+t}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{t}{2} = 0, \\ \cos\frac{3t}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ t = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{array}\right.$$

($k, n \geq 0$, так как $t \geq 0$).

Для исходного уравнения получили равносильную совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} \sqrt{\pi a x - x^2} = 2\pi k, \\ \sqrt{\pi a x - x^2} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}n \end{array}\right.$.

При фиксированном значении a корнями этих уравнений являются абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sqrt{\pi a x - x^2}$ и $y = b$, где b принимает все значения

$$2\pi k \ (k = 0, 1, 2, \ldots), \quad \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}n \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Множество корней исходного уравнения получим, собрав абсциссы точек пересечения графика функции $y = \sqrt{\pi ax - x^2}$ со всеми прямыми $y = b$. Поэтому семейство прямых $y = b$ вместе с графиком $y = \sqrt{\pi ax - x^2}$ можно разместить на одном рисунке (рис.1.45).

При $y \geq 0$ уравнение $y = \sqrt{\pi ax - x^2}$ равносильно уравнению

$$y^2 = \pi ax - x^2 \Leftrightarrow x^2 - \pi ax + y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x\frac{\pi a}{2} + (\frac{\pi a}{2})^2 + y^2 = (\frac{\pi a}{2})^2 \Leftrightarrow (x - \frac{\pi a}{2})^2 + y^2 = (\frac{\pi a}{2})^2.$$

А это – уравнение окружности радиуса $R = \frac{\pi a}{2}$ с центром $(\frac{\pi a}{2}; 0)$, так что график $y = \sqrt{\pi ax - x^2}$ представляет собой верхнюю половину этой окружности.

На рисунке изображены прямые $y = b$ при возрастающих значениях $b = 0, \frac{\pi}{3}, \pi$, которые получаются соответственно при $k = 0, n = 0, n = 1$. Отметим, что концы диаметра полуокружности совпадают с концами ОДЗ.

При любом значении $a > 0$ полуокружность пересекает прямую $y = 0$ в двух точках $(0; 0)$ и $(\pi a; 0)$. Пока радиус меньше $\frac{\pi}{3}$, полуокружность (1) не пересекает других прямых семейства $y = b$. Когда радиус при возрастании значения a станет равным $\frac{\pi}{3}$, полуокружность (2) коснется второй прямой $y = \frac{\pi}{3}$ семейства $y = b$, и точек пересечения окружности с семейством прямых станет три.

При дальнейшем возрастании a полуокружность (3), (4) будет пересекать прямую $y = \frac{\pi}{3}$ в двух точках, и точек пересечения полуокружности с семейством прямых станет уже четыре. При пересечении следующих прямых семейства $y = b$ число точек пересечения неограниченно увеличивается.

Делаем вывод: ровно две точки пересечения имеем, когда радиус $R \in (0; \frac{\pi}{3})$, то есть $0 < \frac{\pi a}{2} < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{2}{3}$.

Итак, при $a > 0$ ровно два корня исходное уравнение имеет при $a \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$.

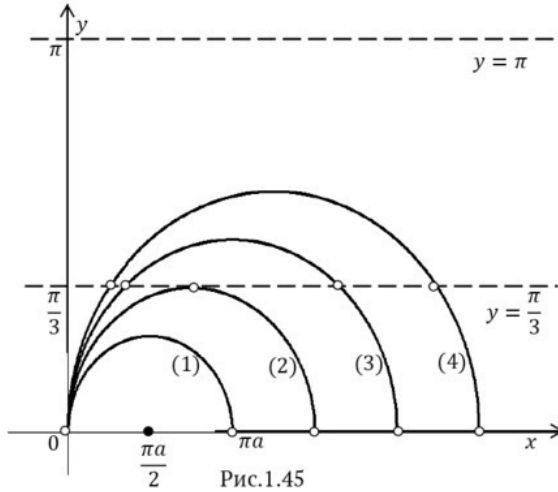


Рис.1.45

Случай $a < 0$. Обратим внимание на то, что если пара чисел $(x;a)$ является решением данного уравнения как уравнения с двумя неизвестными, то пара $(-x;-a)$ тоже является решением (так как $\pi(-a)(-x)-(-x)^2=\pi ax-x^2$). Если при фиксированном значении a данное уравнение как уравнение с одним неизвестным x имеет два корня x_1 и x_2, то это означает, что оно как уравнение с двумя неизвестными x и a имеет два решения $(x_1;a)$ и $(x_2;a)$. Но тогда $(-x_1;-a)$ и $(-x_2;-a)$ тоже являются решениями. А это означает, что при фиксированном значении $-a$ данное уравнение как уравнение с одним неизвестным x имеет два корня $-x_1$ и $-x_2$. Значит, если уравнение имеет ровно два корня при фиксированном значении a, то оно имеет ровно два корня и при значении $-a$.

Отсюда следует, что при $a < 0$ ровно два корня исходное уравнение имеет при $a \in \left(-\frac{2}{3};\ 0\right)$.

Ответ: $-\frac{2}{3} < a < 0,\ 0 < a < \frac{2}{3}$.

Вариант 42

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin 2\sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}} + \cos\sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}} = 0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Будем решать графически. Сначала найдем ОДЗ:

$$2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\pi x - \frac{a^2}{4} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\pi - \sqrt{\pi^2 + \frac{a^2}{4}} \leq x \leq \pi + \sqrt{\pi^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Обозначим $\sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}} = t$. Тогда

$$\sin 2t + \cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t(2\sin t + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t = 0,\\ \sin t = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots \\ t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ \ m = 1, 2, \ldots \\ t = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \ n = 1, 2, \ldots \end{array}\right.$$

($k \geq 0, m, n \geq 1$, так как $t \geq 0$).

Для исходного уравнения получили равносильную совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots \\ \sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ \ m = 1, 2, \ldots \\ \sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \ n = 1, 2, \ldots \end{array}\right. .$$

При фиксированном значении a корнями этих уравнений

являются абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}}$ и $y = b$, где b принимает все значения

$$\frac{\pi}{2} + \pi k \ (k = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi m \ (m = 1, 2, \ldots),$$
$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Множество корней исходного уравнения получим, собрав абсциссы точек пересечения графика функции $y = \sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}}$ со всеми прямыми $y = b$. Поэтому семейство прямых $y = b$ вместе с графиком $y = \sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}}$ можно разместить на одном рисунке (рис.1.46).

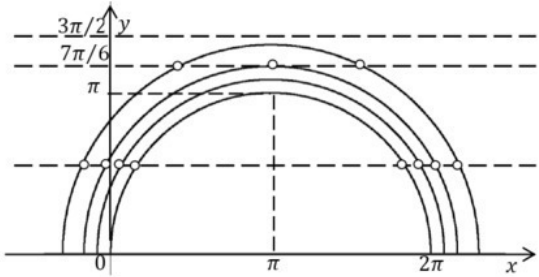


Рис.1.46

При $y \geq 0$ уравнение $y = \sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}}$ равносильно уравнению $y^2 = 2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x^2 - 2\pi x + y^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x^2 - 2x\pi + \pi^2 + y^2 = \pi^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow (x - \pi)^2 + y^2 = \pi^2 + \frac{a^2}{4}$. А это – уравнение окружности радиуса $R = \sqrt{\pi^2 + \frac{a^2}{4}}$ с центром $(\pi; 0)$,

так что график

$$y = \sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}}$$

представляет собой верхнюю половину этой окружности. На рисунке изображены прямые $y = b$ при возрастающих значениях $b = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$, которые получаются соответственно при $k = 0,\ n = 1,\ k = 1$. Отметим, что концы диаметра полуокружности совпадают с концами ОДЗ. При любом значении a полуокружность пересекает прямую $y = \frac{\pi}{2}$ в двух точках. Пока радиус меньше $\frac{7\pi}{6}$, полуокружность не пересекает других прямых семейства $y = b$. Когда радиус при возрастании значения $|a|$ станет равным $\frac{7\pi}{6}$, полуокружность коснется второй прямой $y = \frac{7\pi}{6}$ семейства $y = b$, и точек пересечения окружности с семейством прямых станет три. При дальнейшем возрастании $|a|$ полуокружность будет пересекать прямую $y = \frac{7\pi}{6}$ в двух точках, и точек пересечения полуокружности с семейством прямых станет уже четыре. При пересечении следующих прямых семейства $y = b$ число точек пересечения неограниченно увеличивается. Делаем вывод: ровно две точки пересечения имеем, когда радиус $R < \frac{7\pi}{6}$, то есть $\sqrt{\pi^2 + \frac{a^2}{4}} < \frac{7\pi}{6}$ $\Leftrightarrow a^2 < \frac{13}{9}\pi^2 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{13}}{3}\pi < a < \frac{\sqrt{13}}{3}\pi$.

Итак, ровно два корня исходное уравнение имеет при $a \in \left(-\frac{\sqrt{13}}{3}\pi; \frac{\sqrt{13}}{3}\pi\right)$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{13}}{3}\pi < a < \frac{\sqrt{13}}{3}\pi$.

Вариант 43

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\sqrt{\pi a x - x^2} + \cos 2\sqrt{\pi a x - x^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

При $a = 0$ уравнение имеет вид $\sin\sqrt{-x^2} + \cos 2\sqrt{-x^2} = 0$ и не имеет корней (ОДЗ состоит из одного значения $x = 0$, которое корнем не является) . Поэтому далее считаем, что $a \neq 0$.

Будем решать графически. Сначала найдем ОДЗ: $\pi ax - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - \pi ax \leq 0$. Это неравенство выполняется на отрезке между корнями квадратного трехчлена $x = 0$ и $x = \pi a$. При $a > 0$ на отрезке $[0; \pi a]$, а при $a < 0$ на отрезке $[\pi a; 0]$.

Случай $a > 0$. Обозначим $\sqrt{\pi ax - x^2} = t$. Тогда

$$\sin t + \cos 2t = 0 \Leftrightarrow \sin t + 1 - 2\sin^2 t = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 t - \sin t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \sin t = -\frac{1}{2}, \\ \sin t = 1, \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, & m = 1, 2, \ldots \\ t = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, & n = 1, 2, \ldots \\ t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, & k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$(m, n \geq 1, k \geq 0,$ так как $t \geq 0)$.

Для исходного уравнения получили равносильную совокупность уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\pi ax - x^2} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, & m = 1, 2, \ldots \\ \sqrt{\pi ax - x^2} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, & n = 1, 2, \ldots . \\ \sqrt{\pi ax - x^2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, & k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

При фиксированном значении a корнями этих уравнений являются абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sqrt{\pi ax - x^2}$ и $y = b$, где b принимает все значения

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi m \ (m = 1, 2, \ldots),$$

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \ (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Множество корней исходного уравнения получим, собрав абсциссы точек пересечения графика функции $y = \sqrt{\pi ax - x^2}$ со всеми прямыми $y = b$. Поэтому семейство прямых $y = b$ вместе

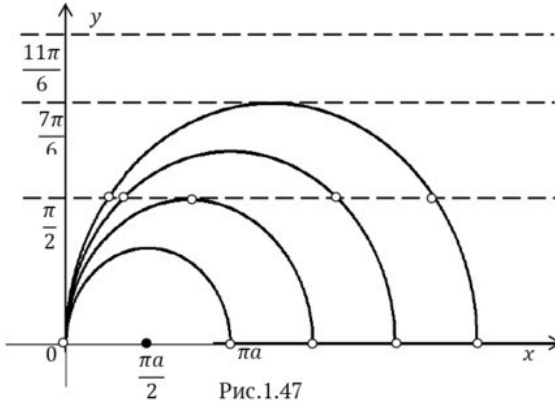


Рис.1.47

с графиком $y = \sqrt{\pi ax - x^2}$ можно разместить на одном рисунке (рис.1.47).

При $y \geq 0$ уравнение $y = \sqrt{\pi ax - x^2}$ равносильно уравнению $y^2 = \pi ax - x^2 \quad \Leftrightarrow x^2 - \pi ax + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x\frac{\pi a}{2} + (\frac{\pi a}{2})^2 + y^2 = (\frac{\pi a}{2})^2 \Leftrightarrow (x - \frac{\pi a}{2})^2 + y^2 = (\frac{\pi a}{2})^2$. А это – уравнение окружности радиуса $R = \frac{\pi a}{2}$ с центром $(\frac{\pi a}{2}; 0)$, так что график $y = \sqrt{\pi ax - x^2}$ представляет собой верхнюю половину этой окружности.

На рисунке изображены прямые $y = b$ при возрастающих значениях $b = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$, которые получаются соответственно при $k = 0, n = 1, m = 1$. Отметим, что концы диаметра полуокружности совпадают с концами ОДЗ.

Когда радиус $R < \frac{\pi}{2}$, полуокружность не пересекает ни одной прямой семейства $y = b$. При $R = \frac{\pi}{2}$ она пересекает прямую $y = \frac{\pi}{2}$ в одной точке (касается ее). При $\frac{\pi}{2} < R < \frac{7\pi}{6}$ пересекает прямую $y = \frac{\pi}{2}$ в двух точках. При $R = \frac{7\pi}{6}$ пересекает прямую $y = \frac{\pi}{2}$ в двух точках и прямую $y = \frac{7\pi}{6}$ в одной точке

(касается ее). При дальнейшем возрастании радиуса R число точек пересечения полуокружности с семейством прямых $y = b$ неограниченно увеличивается. Делаем вывод: ровно две точки пересечения имеем, когда радиус $R \in (\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6})$, то есть $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi a}{2} < \frac{7\pi}{6}$ $\Leftrightarrow 1 < a < \frac{7}{3}$.

Итак, при $a > 0$ ровно два корня исходное уравнение имеет при $a \in \left(1; \frac{7}{3}\right)$.

Случай $a < 0$. Обратим внимание на то, что если пара чисел $(x; a)$ является решением данного уравнения как уравнения с двумя неизвестными, то пара $(-x; -a)$ тоже является решением (так как $\pi(-a)(-x) - (-x)^2 = \pi ax - x^2$). Если при фиксированном значении a данное уравнение как уравнение с одним неизвестным x имеет два корня x_1 и x_2, то это означает, что оно как уравнение с двумя неизвестными x и a имеет два решения $(x_1; a)$ и $(x_2; a)$. Но тогда $(-x_1; -a)$ и $(-x_2; -a)$ тоже являются решениями. А это означает, что при фиксированном значении $-a$ данное уравнение как уравнение с одним неизвестным x имеет два корня $-x_1$ и $-x_2$. Значит, если уравнение имеет ровно два корня при фиксированном значении a, то оно имеет ровно два корня и при значении $-a$. Отсюда следует, что при $a < 0$ ровно два корня исходное уравнение имеет при $a \in \left(-\frac{7}{3}; -1\right)$.

Ответ: $-\frac{7}{3} < a < -1,\ 1 < a < \frac{7}{3}$.

Вариант 44

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\sqrt{2\pi ax - 4x^2} + \cos 2\sqrt{2\pi ax - 4x^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

При $a = 0$ уравнение имеет вид $\cos\sqrt{-4x^2} + \cos 2\sqrt{-4x^2} = 0$ и не имеет корней (ОДЗ состоит из одного значения $x = 0$, которое корнем не является). Поэтому далее считаем, что $a \neq 0$.

В предыдущих вариантах мы пользовались уравнением окружности радиуса r с центром $(r; 0)$, которое имеет вид $(x-r)^2+y^2=r^2$ и при $y \geq 0$ равносильно уравнению $y=\sqrt{2rx-x^2}$. Чтобы свести нашу задачу к подобному случаю, положим $2x=t$. Получим уравнение $\cos\sqrt{\pi at-t^2}+\cos 2\sqrt{\pi at-t^2}=0$. При каждом значении a между множествами корней данного уравнения и нового имеется взаимно однозначное соответствие: каждому корню x данного уравнения соответствует один корень $t=2x$ нового уравнения, и каждому корню t нового уравнения соответствует один корень $x=\frac{t}{2}$ данного уравнения. Поэтому задача сформулируется так: найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\sqrt{\pi at-t^2}+\cos 2\sqrt{\pi at-t^2}=0$$

имеет ровно два корня.

Будем решать графически. Сначала найдем ОДЗ: $\pi at-t^2 \geq 0 \Leftrightarrow t^2-\pi at \leq 0$. Это неравенство выполняется на отрезке между корнями квадратного трехчлена $t=0$ и $t=\pi a$. При $a>0$ на отрезке $[0; \pi a]$, а при $a<0$ на отрезке $[\pi a; 0]$.

Случай $a>0$. Обозначим $\sqrt{\pi at-t^2}=y$. Получим уравнение $\cos y+\cos 2y=0 \Leftrightarrow \cos y+2\cos^2 y-1=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 y+\cos y-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos y=-1,\\ \cos y=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=\pi+2\pi k\ (k=0,1,2,\ldots),\\ y=-\frac{\pi}{3}+2\pi m\ (m=1,2,\ldots),\\ y=\frac{\pi}{3}+2\pi n\ (n=0,1,2,\ldots)\end{array}\right.$$

($k, n \geq 0$, $m \geq 1$ так как $y \geq 0$).

Для исходного уравнения получили равносильную совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{\pi at-t^2}=\pi+2\pi k\ (k=0,1,2,\ldots),\\ \sqrt{\pi at-t^2}=-\frac{\pi}{3}+2\pi m\ (m=1,2,\ldots),\\ \sqrt{\pi at-t^2}=\frac{\pi}{3}+2\pi n\ (n=0,1,2,\ldots).\end{array}\right.$$

При фиксированном значении a корнями этих уравнений являются абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sqrt{\pi at - t^2}$ и $y = b$, где b принимает все значения

$\pi + 2\pi k\ (k = 0, 1, 2, \dots), -\frac{\pi}{3} + 2\pi m\ (m = 1, 2, \dots), \frac{\pi}{3} + 2\pi n\ (n = 0, 1, 2, \dots)$.

Множество корней исходного уравнения получим, собрав абсциссы точек пересечения графика функции $y = \sqrt{\pi at - t^2}$ со всеми прямыми $y = b$. Поэтому семейство прямых $y = b$ вместе с графиком $y = \sqrt{\pi at - t^2}$ можно разместить на одном рисунке (рис.1.48).

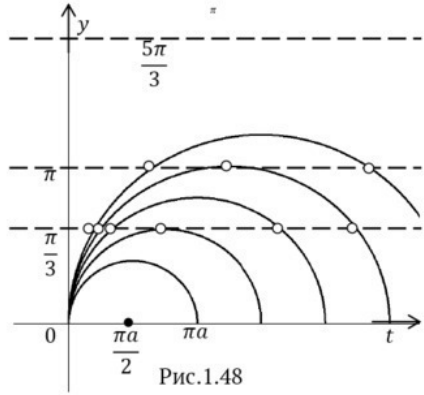


Рис.1.48

При $y \geq 0$ уравнение $y = \sqrt{\pi at - t^2}$ равносильно уравнению $y^2 = \pi at - t^2 \Leftrightarrow t^2 - \pi at + y^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t\frac{\pi a}{2} + (\frac{\pi a}{2})^2 + y^2 = (\frac{\pi a}{2})^2 \Leftrightarrow (t - \frac{\pi a}{2})^2 + y^2 = (\frac{\pi a}{2})^2$. А это – уравнение окружности радиуса $r = \frac{\pi a}{2}$ с центром $(\frac{\pi a}{2}; 0)$, так что график $y = \sqrt{\pi at - t^2}$ представляет собой верхнюю половину этой окружности.

На рисунке изображены прямые $y = b$ при возрастающих значениях $b = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$, которые получаются соответственно при $n = 0, k = 0, m = 1$. Отметим, что концы диаметра полуокружности совпадают с концами ОДЗ.

Когда радиус $r < \frac{\pi}{3}$, полуокружность не пересекает ни одной прямой семейства $y = b$. При $r = \frac{\pi}{3}$ она пересекает прямую $y = \frac{\pi}{3}$ в одной точке (касается ее). При $\frac{\pi}{3} < r < \pi$ пересекает прямую $y = \frac{\pi}{3}$ в двух точках. При $r = \pi$ пересекает прямую $y = \frac{\pi}{3}$ в двух точках и прямую $y = \pi$ в одной точке (касается ее). При дальнейшем возрастании радиуса r число точек пересечения полуокружности с семейством прямых $y = b$ неограниченно увеличивается. Делаем вывод: ровно две точки пересечения имеем, когда радиус $r \in (\frac{\pi}{3}; \pi)$, то есть $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi a}{2} < \pi \Leftrightarrow \frac{2}{3} < a < 2$.

Итак, при $a > 0$ ровно два корня исходное уравнение имеет при $a \in \left(\frac{2}{3}; 2\right)$.

Случай $a < 0$. Обратим внимание на то, что если пара чисел $(t; a)$ является решением данного уравнения как уравнения с двумя неизвестными, то пара $(-t; -a)$ тоже является решением (так как $\pi(-a)(-t) - (-t)^2 = \pi at - t^2$). Если при фиксированном значении a данное уравнение как уравнение с одним неизвестным t имеет два корня t_1 и t_2, то это означает, что оно как уравнение с двумя неизвестными t и a имеет два решения $(t_1; a)$ и $(t_2; a)$. Но тогда $(-t_1; -a)$ и $(-t_2; -a)$ тоже являются решениями. А это означает, что при фиксированном значении $-a$ данное уравнение как уравнение с одним неизвестным t имеет два корня $-t$ и $-t_2$. Значит, если уравнение имеет ровно два корня при фиксированном значении a, то оно имеет ровно два корня и при значении $-a$. Отсюда следует, что при $a < 0$ ровно два корня исходное уравнение имеет при $a \in \left(-2; -\frac{2}{3}\right)$.

Ответ: $-2 < a < -\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} < a < 2$.

Вариант 45

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\sqrt{ax - x^2 - \pi^2} + \cos 2\sqrt{ax - x^2 - \pi^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Будем решать графически. Сначала найдем ОДЗ. $ax - x^2 - \pi^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + \pi^2 \leq 0$.

Когда дискриминант квадратного трехчлена $D = a^2 - 4\pi^2 < 0$, то есть $|a| < 2\pi$, неравенство не имеет решений, и ОДЗ $= \emptyset$. Когда $D = 0$, то есть $|a| = 2\pi$, неравенство имеет единственное решение $x = \frac{a}{2}$, ОДЗ состоит только из одного значения $x = \frac{a}{2}$ и потому уравнение не может иметь двух различных корней. Когда $D > 0$, то есть $|a| > 2\pi$, неравенство выполняется на отрезке между корнями трехчлена, так что

$$\text{ОДЗ} = [\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2-4\pi^2}}{2}\,;\ \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2-4\pi^2}}{2}].$$

Середина этого отрезка $\frac{a}{2}$ находится левее точки $-\pi$ при $a < -2\pi$, и правее точки π при $a > 2\pi$.

Обозначим $\sqrt{ax - x^2 - \pi^2} = t$. Тогда

$$\sin t + \cos 2t = 0 \Leftrightarrow \sin t + 1 - 2\sin^2 t = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 t - \sin t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = -\frac{1}{2}, \\ \sin t = 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, \ \ m = 1, 2, \ldots \\ t = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ \ n = 1, 2, \ldots \\ t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \ k = 0, 1, 2, \ldots \end{array}\right.$$

$(m, n \geq 1, k \geq 0,$ так как $t \geq 0)$.

Для исходного уравнения получили равносильную совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{ax - x^2 - \pi^2} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, \ \ m = 1, 2, \ldots \\ \sqrt{ax - x^2 - \pi^2} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ \ n = 1, 2, \ldots . \\ \sqrt{ax - x^2 - \pi^2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \ k = 0, 1, 2, \ldots \end{array}\right.$$

При фиксированном значении a корнями этих уравнений являются абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sqrt{ax - x^2 - \pi^2}$ и $y = b$, где b принимает все значения

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi m\ (m=1,2,\dots),$$
$$-\frac{5\pi}{6}+2\pi n\ (n=1,2,\dots),$$
$$\frac{\pi}{2}+2\pi k\ (k=0,1,2,\dots).$$

Множество корней исходного уравнения получим, собрав абсциссы точек пересечения графика функции $y=\sqrt{ax-x^2-\pi^2}$ со всеми прямыми $y=b$. Поэтому семейство прямых $y=b$ вместе с графиком $y=\sqrt{ax-x^2-\pi^2}$ можно разместить на одном рисунке.

При $y\geq 0$ уравнение $y=\sqrt{ax-x^2-\pi^2}$ равносильно уравнению $y^2=ax-x^2-\pi^2 \Leftrightarrow x^2-ax+y^2=-\pi^2 \Leftrightarrow x^2-2x\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}+y^2=\frac{a^2}{4}-\pi^2 \Leftrightarrow (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2-4\pi^2}{4}$. А это – уравнение окружности радиуса $R=\frac{\sqrt{a^2-4\pi^2}}{2}$ с центром $(\frac{a}{2};0)$, так что график $y=\sqrt{ax-x^2-\pi^2}$ представляет собой верхнюю половину этой окружности. Концы ее диаметра совпадают с концами ОДЗ.

Здесь приведен рисунок для случая $a>2\pi$ (рис.1.49) В случае $a<-2\pi$ рисунок симметричен относительно оси $0y$ (только концы ОДЗ располагаются в том же порядке). Изображены прямые $y=b$ при возрастающих значениях $b=\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$, которые получаются соответственно при $k=0, n=1, m=1$.

Когда радиус $R<\frac{\pi}{2}$, полуокружность не пересекает ни одной прямой семейства $y=b$. При $R=\frac{\pi}{2}$ она пересекает прямую $y=\frac{\pi}{2}$ в одной точке (касается ее). При $\frac{\pi}{2}<R<\frac{7\pi}{6}$ пересекает прямую $y=\frac{\pi}{2}$ в двух точках. При $R=\frac{7\pi}{6}$ пересекает прямую $y=\frac{\pi}{2}$ в двух точках и прямую $y=\frac{7\pi}{6}$ в одной точке (касается ее). При дальнейшем возрастании радиуса R число точек пересечения полуокружности с семейством прямых $y=b$ неограниченно увеличивается. Делаем вывод: ровно две точки

пересечения имеем, когда радиус $R \in (\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6})$, то есть $\frac{\pi}{2} <$

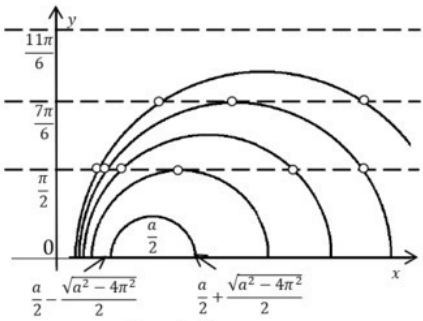


Рис.1.49

$\frac{\sqrt{a^2-4\pi^2}}{2} < \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > \sqrt{5}\pi \\ |a| < \frac{\sqrt{85}\pi}{3} \end{cases}$. Итак ровно два корня исходное уравнение имеет при $a \in \left(-\frac{\sqrt{85}\pi}{3}; -\sqrt{5}\pi\right) \cup (\sqrt{5}\pi; \frac{\sqrt{85}\pi}{3})$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{85}\pi}{3} < a < -\sqrt{5}\pi,\ \sqrt{5}\pi < a < \frac{\sqrt{85}\pi}{3}$.

Вариант 46

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay + ax + 3)(y + x - a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Решение.

Из второго уравнения видим, что должно быть $a \geq 0$. При $a = 0$ система имеет вид $\begin{cases} y + x = 0, \\ xy = 0 \end{cases}$ и имеет единственное решение $(x; y) = (0; 0)$. Поэтому далее считаем, что $a > 0$.

Задачу будем решать графически (рис.1.50). Первое уравнение равносильно совокупности $\begin{bmatrix} x+y=-\frac{3}{a}, \\ x+y=a. \end{bmatrix}$ Ее график $L=l_1\cup l_2$ прелставляет собой пару параллельных прямых: прямая l_1 с уравнением $x+y=-\frac{3}{a}$ проходит через точки $(-\frac{3}{a};0)$ и $(0;-\frac{3}{a})$, прямая l_2 с уравнением $x+y=a$– через точки

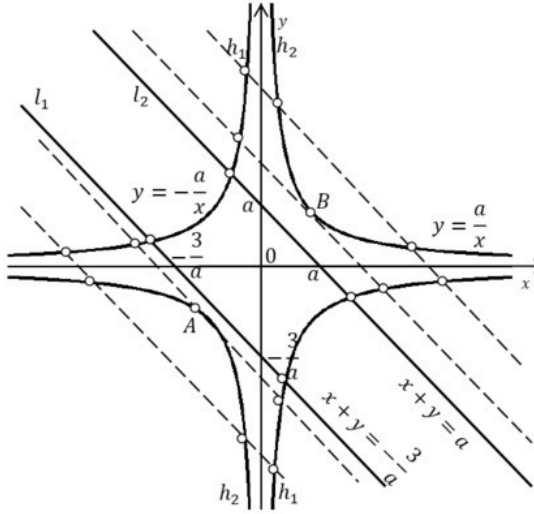


Рис.1.50

$(a;0)$ и $(0;a)$ (параллельность следует, например, из того, что при пересечении их осью абсцисс внутренние накрест лежащие углы равны по $45°$). При всех значениях a эти прямые находятся по разные стороны от начала координат, так как $-\frac{3}{a}<0$ и $a>0$ (совпасть не могут, так как равенство $-\frac{3}{a}=a$ при $a>0$ невозможно).

Второе уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} xy=-a \\ xy=a. \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{a}{x}, \\ y=\frac{a}{x}. \end{array}\right.$ Ее график $H=h_1 \cup h_2$ прелставляет собой пару гипербол: гипербола h_1 с уравнением $y=-\frac{a}{x}$ с ветвями во II и IV квадрантах и гипербола h_2 с уравнением $y=\frac{a}{x}$ с ветвями в I и III квадрантах.

Решениями данной системы являются точки $(x;y)$, в которых пересекаются два графика L и H.

Прямая l_1 при всех значениях $a>0$ пересекает гиперболу h_1 в двух точках (во II и IV квадрантах). В зависимости от значений a гиперболу h_2 она может пересекать в двух точках (в III квадранте), в одной точке A (точка касания) и не пересекать. Рассмотрим пересечение l_1 с h_2:

$$\begin{cases} x+y=-\frac{3}{a}, \\ y=\frac{a}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-\frac{3}{a}, \\ xy=a. \end{cases} \qquad (1)$$

В соответствии с теоремой Виета пара $(x;y)$ является решением этой системы тогда и только тогда, когда числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2+\frac{3}{a}t+a=0$. Его дискриминант $D=\frac{9}{a^2}-4a=\frac{9-4a^3}{a^2}$ положителен при $a<\sqrt[3]{2{,}25}$, равен нулю при $a=\sqrt[3]{2{,}25}$, отрицателен при $a>\sqrt[3]{2{,}25}$.

Следовательно,

при $0<a<\sqrt[3]{2{,}25}$ квадратное уравнение имеет два различных корня $t=x$ и $t=y$; пара $(x;y)$ является решением системы (1); ввиду симметрии системы относительно x и y пара $(y;x)$ тоже является ее решением, так что система (1) имеет два различных решения $(x;y)$ и $(y;x)$, то есть прямая l_1 пересекает гиперболу h_2 в двух точках, а весь график H в 4 точках;

при $a=\sqrt[3]{2{,}25}$ квадратное уравнение имеет один корень $t=x=y$; решением системы (1) является одна пара $(x;x)$, то

есть прямая l_1 пересекает гиперболу h_2 в одной точке (точка касания A на биссектрисе I и III координатных углов), а весь график H в 3 точках;

при $a > \sqrt[3]{2{,}25}$ квадратное уравнение не имеет корней, система (1) не совместна, то есть прямая l_1 не пересекает гиперболу h_2, а весь график H пересекает в 2 точках.

Прямая l_2 при всех $a > 0$ пересекает гиперболу h_1 в двух точках (во II и IV квадрантах). В зависимости от значений a гиперболу h_2 она может пересекать в двух точках (в I квадранте), в одной точке B (точка касания) и не пересекать. Рассмотрим пересечение l_2 с h_2:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ y = \frac{a}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a, \\ xy = a. \end{cases} \qquad (2)$$

В соответствии с теоремой Виета пара $(x; y)$ является решением этой системы тогда и только тогда, когда числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2 - at + a = 0$. Его дискриминант $D = a^2 - 4a$ положителен при $a > 4$, равен нулю при $a = 4$ и отрицателен при $a < 4$.

Следовательно,

при $a > 4$ квадратное уравнение имеет два различных корня $t = x$ и $t = y$; пара $(x; y)$ является решением системы (2); ввиду симметрии системы относительно x и y пара $(y; x)$ тоже является ее решением, так что система (2) имеет два различных решения $(x; y)$ и $(y; x)$, то есть прямая l_2 пересекает гиперболу h_2 в двух точках, а весь график H в 4 точках;

при $a = 4$ квадратное уравнение имеет один корень $t = x = y$; решением системы (1) является одна пара $(x; x)$, то есть прямая l_2 пересекает гиперболу h_2 в одной точке (точка касания B на биссектрисе I и III координатных углов), а весь график H в 3 точках;

при $a < 4$ квадратное уравнение не имеет корней, система (2) не совместна, то есть прямая l_2 не пересекает гиперболу h_2, а весь график H пересекает в 2 точках.

В совокупности весь график L пересекает график H ровно в

4 точках при тех значениях a, когда прямые l_1 и l_2 пересекают график H каждая в двух точках: $\begin{cases} a > \sqrt[3]{2{,}25}, \\ a < 4. \end{cases}$ Итак, данная система имеет ровно 4 решения при $\sqrt[3]{2{,}25} < a < 4$.

Ответ: $\sqrt[3]{2{,}25} < a < 4$.

Вариант 47

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay + ax - 2)(y + x + 3a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет ровно восемь решений.

Решение.

Из второго уравнения видим, что должно быть $a \geq 0$. При $a = 0$ система имеет вид $\begin{cases} y + x = 0, \\ xy = 0 \end{cases}$ и имеет единственное решение $(x;\ y) = (0;\ 0)$. Поэтому далее считаем, что $a > 0$.

Задачу будем решать графически (рис.1.51).

Первое уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x + y = -3a, \\ x + y = \frac{2}{a}. \end{array}\right.$$

Ее график $L = l_1 \cup l_2$ прелставляет собой пару параллельных прямых: прямая l_1 с уравнением $x + y = -3a$ проходит через точки $(-3a;\ 0)$ и $(0;\ -3a)$, прямая l_2 с уравнением $x + y = \frac{2}{a}$ – через точки $(\frac{2}{a};\ 0)$ и $(0;\ \frac{2}{a})$, (параллельность следует, например, из того, что при пересечении их осью абсцисс внутренние накрест лежащие углы равны по $45°$). При всех значениях a эти прямые находятся по разные стороны от начала координат, так как $-3a < 0$ и $\frac{2}{a} > 0$ (совпасть не могут, так как равенство $-3a = \frac{2}{a}$ при $a > 0$ невозможно).

Второе уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} xy=-a \\ xy=a. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\frac{a}{x}, \\ y=\frac{a}{x}. \end{array}\right.$$

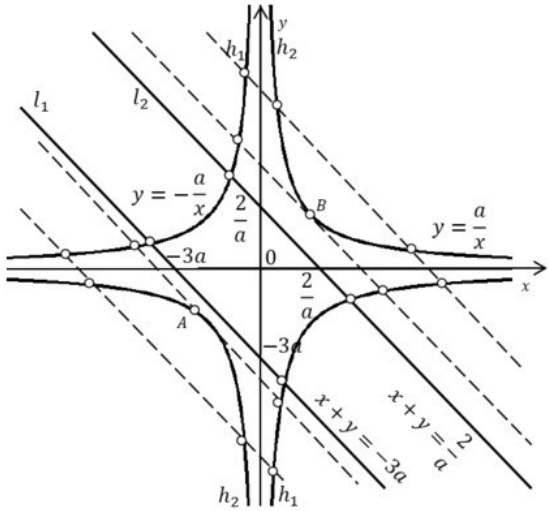


Рис.1.51

Ее график $H = h_1 \cup h_2$ прелставляет собой пару гипербол: гипербола h_1 с уравнением $y = -\frac{a}{x}$ с ветвями во II и IV квадрантах и гипербола h_2 с уравнением $y = \frac{a}{x}$ с ветвями в I и III квадрантах.

Решениями данной системы являются точки $(x; y)$, в которых пересекаются два графика L и H.

Прямая l_1 при всех значениях $a > 0$ пересекает гиперболу h_1 в двух точках (во II и IV квадрантах). В зависимости от значений a гиперболу h_2 она может пересекать в двух точках (в III квадранте), в одной точке A (точка касания) и не пересекать. Рассмотрим пересечение l_1 с h_2:

$$\begin{cases} x+y=-3a, \\ y=\frac{a}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3a, \\ xy=a. \end{cases} \quad (1)$$

В соответствии с теоремой Виета пара $(x;y)$ является решением этой системы тогда и только тогда, когда числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2+3at+a=0$. Его дискриминант $D=9a^2-4a$ положителен при $a>\frac{4}{9}$, равен нулю при $a=\frac{4}{9}$ и отрицателен при $a<\frac{4}{9}$.

Следовательно,

при $a>\frac{4}{9}$ квадратное уравнение имеет два различных корня $t=x$ и $t=y$; пара $(x;y)$ является решением системы (1); ввиду симметрии системы относительно x и y пара $(y;x)$ тоже является ее решением, так что система (1) имеет два различных решения $(x;y)$ и $(y;x)$, то есть прямая l_1 пересекает гиперболу h_2 в двух точках, а весь график H в 4 точках;

при $a=\frac{4}{9}$ квадратное уравнение имеет один корень $t=x=y$; решением системы (1) является одна пара $(x;x)$, то есть прямая l_1 пересекает гиперболу h_2 в одной точке (точка касания A на биссектрисе I и III координатных углов), а весь график H в 3 точках;

при $0<a<\frac{4}{9}$ квадратное уравнение не имеет корней, система (1) не совместна, то есть прямая l_1 не пересекает гиперболу h_2, а весь график H пересекает в 2 точках.

Прямая l_2 при всех $a>0$ пересекает гиперболу h_1 в двух точках (во II и IV квадрантах). В зависимости от значений a гиперболу h_2 она может пересекать в двух точках (в I квадранте), в одной точке B (точка касания) и не пересекать. Рассмотрим пересечение l_2 с h_2:

$$\begin{cases} x+y=\frac{2}{a}, \\ y=\frac{a}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{2}{a}, \\ xy=a. \end{cases} \quad (2)$$

В соответствии с теоремой Виета пара $(x;y)$ является решением этой системы тогда и только тогда, когда числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2-\frac{2}{a}t+a=0$. Его

дискриминант $D=\frac{4}{a^2}-4a=\frac{4-4a^3}{a^2}$ положителен при $a<1$, равен нулю при $a=1$ и отрицателен при $a>1$.

Следовательно,

при $a<1$ квадратное уравнение имеет два различных корня $t=x$ и $t=y$; пара $(x;y)$ является решением системы (2); ввиду симметрии системы относительно x и y пара $(y;x)$ тоже является ее решением, так что система (2) имеет два различных решения $(x;y)$ и $(y;x)$, то есть прямая l_2 пересекает гиперболу h_2 в двух точках, а весь график H в 4 точках;

при $a=1$ квадратное уравнение имеет один корень $t=x=y$; решением системы (1) является одна пара $(x;x)$, то есть прямая l_2 пересекает гиперболу h_2 в одной точке (точка касания B на биссектрисе I и III координатных углов), а весь график H в 3 точках;

при $a>1$ квадратное уравнение не имеет корней, система (2) не совместна, то есть прямая l_2 не пересекает гиперболу h_2, а весь график H пересекает в 2 точках.

В совокупности весь график L пересекает график H ровно в 8 точках при тех значениях a, когда прямые l_1 и l_2 пересекают график H каждая в 4 точках: $\begin{cases}a>\frac{4}{9},\\a<1.\end{cases}$ Итак, данная система имеет ровно 8 решений при $\frac{4}{9}<a<1$.

Ответ: $\frac{4}{9}<a<1$.

Вариант 48

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax+3)(y+x-a)=0,\\|xy|=a\end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

Решение.

Из второго уравнения видим, что должно быть $a\geq 0$. При

$a = 0$ система имеет вид $\begin{cases} y + x = 0, \\ xy = 0 \end{cases}$ и имеет единственное решение $(x;\ y) = (0; 0)$. Поэтому далее считаем, что $a > 0$.

Задачу будем решать графически (рис.1.52).

Первое уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x + y = -\dfrac{3}{a}, \\ x + y = a. \end{array}\right.$$

Ее график $L = l_1 \cup l_2$ прелставляет собой пару параллельных прямых: прямая l_1 с уравнением $x + y = -\frac{3}{a}$ проходит через точки $(-\frac{3}{a}; 0)$ и $(0; -\frac{3}{a})$, прямая l_2 с уравнением $x + y = a$ – через точки $(a; 0)$ и $(0; a)$ (параллельность следует, например, из того, что при пересечении их осью абсцисс внутренние накрест лежащие углы равны по 45°). При всех значениях a эти прямые находятся по разные стороны от начала координат, так как $-\frac{3}{a} < 0$ и $a > 0$ (совпасть не могут, так как равенство $-\frac{3}{a} = a$ при $a > 0$ невозможно).

Второе уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} xy = -a \\ xy = a. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{a}{x}, \\ y = \dfrac{a}{x}. \end{array}\right.$$

Ее график $H = h_1 \cup h_2$ прелставляет собой пару гипербол: гипербола h_1 с уравнением $y = -\frac{a}{x}$ с ветвями во II и IV квадрантах и гипербола h_2 с уравнением $y = \frac{a}{x}$ с ветвями в I и III квадрантах. Решениями данной системы являются точки $(x; y)$, в которых пересекаются два графика L и H.

Прямая l_1 при всех значениях $a > 0$ пересекает гиперболу h_1 в двух точках (во II и IV квадрантах). В зависимости от значений a гиперболу h_2 она может пересекать в двух точках (в III квадранте), в одной точке A (точка касания) и не пересекать.

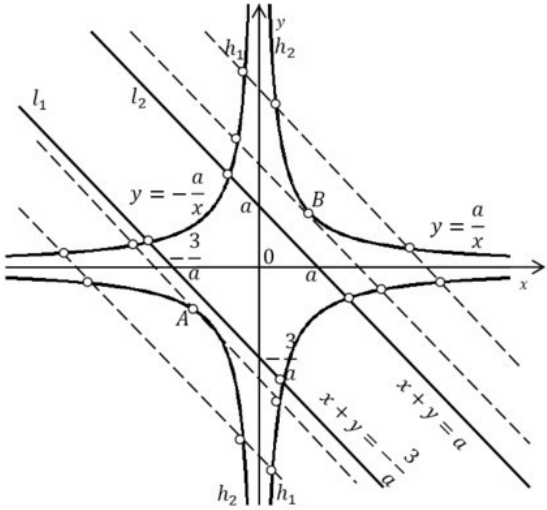


Рис.1.52

Рассмотрим пересечение l_1 с h_2:

$$\begin{cases} x+y=-\frac{3}{a}, \\ y=\frac{a}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-\frac{3}{a}, \\ xy=a. \end{cases} \qquad (1)$$

В соответствии с теоремой Виета пара $(x; y)$ является решением этой системы тогда и только тогда, когда числа x и y являются корнями квадратного уравнения

$$t^2+\frac{3}{a}t+a=0.$$

Его дискриминант $D=\frac{9}{a^2}-4a=\frac{9-4a^3}{a^2}$ положителен при $a<\sqrt[3]{2{,}25}$, равен нулю при $a=\sqrt[3]{2{,}25}$ и отрицателен при $a>\sqrt[3]{2{,}25}$.

Следовательно,

при $0<a<\sqrt[3]{2{,}25}$ квадратное уравнение имеет два

различных корня $t = x$ и $t = y$; пара $(x; y)$ является решением системы (1); ввиду симметрии системы относительно x и y пара $(y; x)$ тоже является ее решением, так что система (1) имеет два различных решения $(x; y)$ и $(y; x)$, то есть прямая l_1 пересекает гиперболу h_2 в двух точках, а весь график H в 4 точках;

при $a = \sqrt[3]{2{,}25}$ квадратное уравнение имеет один корень $t = x = y$; решением системы (1) является одна пара $(x; x)$, то есть прямая l_1 пересекает гиперболу h_2 в одной точке (точка касания A на биссектрисе I и III координатных углов), а весь график H в 3 точках;

при $a > \sqrt[3]{2{,}25}$ квадратное уравнение не имеет корней, система (1) не совместна, то есть прямая l_1 не пересекает гиперболу h_2, а весь график H пересекает в 2 точках.

Прямая l_2 при всех $a > 0$ пересекает гиперболу h_1 в двух точках (во II и IV квадрантах). В зависимости от значений a гиперболу h_2 она может пересекать в двух точках (в I квадранте), в одной точке B (точка касания) и не пересекать. Рассмотрим пересечение l_2 с h_2:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ y = \frac{a}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a, \\ xy = a. \end{cases} \qquad (2)$$

В соответствии с теоремой Виета пара $(x; y)$ является решением этой системы тогда и только тогда, когда числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2 - at + a = 0$. Его дискриминант $D = a^2 - 4a$ положителен при $a > 4$, равен нулю при $a = 4$ и отрицателен при $a < 4$.

Следовательно,

при $a > 4$ квадратное уравнение имеет два различных корня $t = x$ и $t = y$; пара $(x; y)$ является решением системы (2); ввиду симметрии системы относительно x и y пара $(y; x)$ тоже является ее решением, так что система (2) имеет два различных решения $(x; y)$ и $(y; x)$, то есть прямая l_2 пересекает гиперболу h_2 в двух точках, а весь график H в 4 точках;

при $a = 4$ квадратное уравнение имеет один корень $t = x = y$; решением системы (1) является одна пара $(x; x)$, то есть прямая l_2 пересекает гиперболу h_2 в одной точке (точка касания B на биссектрисе I и III координатных углов), а весь график H в 3 точках;

при $a < 4$ квадратное уравнение не имеет корней, система (2) не совместна, то есть прямая l_2 не пересекает гиперболу h_2, а весь график H пересекает в 2 точках.

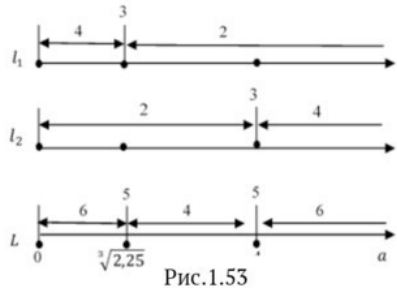


Рис.1.53

Для каждой прямой l_1 и l_2 количество точек ее пересечения с графиком H в зависимости от значения $a > 0$ изобразим (рис.1.53) на числовой прямой $0a$ (на интервалах и в отдедьных точках). Сложив количества точек пересечения на интервалах и в отдельных точках, получим количество точек пересечения всего графика L с графиком H.

По результату видим, что ровно 6 точек пересечения имеются при

$$a \in \left(0;\ \sqrt[3]{2,25}\right) \cup (4;\ +\infty).$$

Значит, данная система имеет ровно 6 решений при

$$0 < a < \sqrt[3]{2,25} \text{ и } a > 4.$$

Ответ: $0 < a < \sqrt[3]{2,25}$ и $a > 4$.

Вариант 49

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay + ax - 2)(y + x + 3a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

Решение.

Из второго уравнения видим, что должно быть $a \geq 0$. При $a = 0$ система имеет вид $\begin{cases} y + x = 0, \\ xy = 0 \end{cases}$ и имеет единственное решение $(x; y) = (0; 0)$. Поэтому далее считаем, что $a > 0$.

Задачу будем решать графически (рис.1.54). Первое уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x + y = -3a, \\ x + y = \frac{2}{a}. \end{array}\right.$$

Ее график $L = l_1 \cup l_2$ прелставляет собой пару параллельных прямых: прямая l_1 с уравнением $x + y = -3a$ проходит через точки $(-3a; 0)$ и $(0; -3a)$, прямая l_2 с уравнением $x + y = \frac{2}{a}$ – через точки $(\frac{2}{a}; 0)$ и $(0; \frac{2}{a})$ (параллельность следует, например, из того, что при пересечении их осью абсцисс внутренние накрест лежащие углы равны по 45°). При всех значениях a эти прямые находятся по разные стороны от начала координат, так как $-3a < 0$ и $\frac{2}{a} > 0$ (совпасть не могут, так как равенство $-3a = \frac{2}{a}$ при $a > 0$ невозможно).

Второе уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} xy = -a \\ xy = a. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\frac{a}{x}, \\ y = \frac{a}{x}. \end{array}\right.$$

Ее график $H = h_1 \cup h_2$ представляет собой пару гипербол: гипербола h_1 с уравнением
$y = -\frac{a}{x}$ с ветвями во II и IV квадрантах и гипербола h_2 с уравнением $y = \frac{a}{x}$ с ветвями в I и III квадрантах.

Решениями данной системы являются точки $(x; y)$, в которых пересекаются два графика L и H.

Прямая l_1 при всех значениях $a > 0$ пересекает гиперболу h_1 в двух точках (во II и IV квадрантах). В зависимости от значений a гиперболу h_2 она может пересекать в двух точках (в III квадранте), в одной точке A (точка касания) и не пересекать.

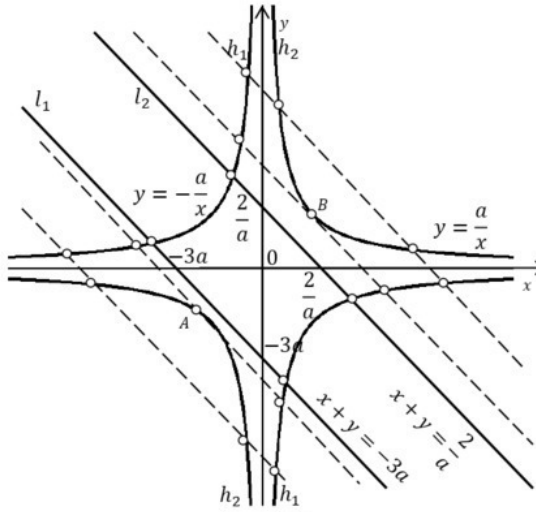


Рис.1.54

Рассмотрим пересечение l_1 с h_2:

$$\begin{cases} x + y = -3a, \\ y = \frac{a}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -3a, \\ xy = a. \end{cases} \qquad (1)$$

В соответствии с теоремой Виета пара $(x; y)$ является решением этой системы тогда и только тогда, когда числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2 + 3at + a = 0$. Его дискриминант $D = 9a^2 - 4a$ положителен при $a > \frac{4}{9}$, равен нулю при $a = \frac{4}{9}$ и отрицателен при $a < \frac{4}{9}$.

Следовательно,

при $a > \frac{4}{9}$ квадратное уравнение имеет два различных корня $t = x$ и $t = y$; пара $(x; y)$ является решением системы (1); ввиду симметрии системы относительно x и y пара $(y; x)$ тоже является ее решением, так что система (1) имеет два различных

решения $(x;y)$ и $(y;x)$, то есть прямая l_1 пересекает гиперболу h_2 в двух точках, а весь график H в 4 точках;

при $a=\frac{4}{9}$ квадратное уравнение имеет один корень $t=x=y$; решением системы (1) является одна пара $(x;x)$, то есть прямая l_1 пересекает гиперболу h_2 в одной точке (точка касания A на биссектрисе I и III координатных углов), а весь график H в 3 точках;

при $0<a<\frac{4}{9}$ квадратное уравнение не имеет корней, система (1) не совместна, то есть прямая l_1 не пересекает гиперболу h_2, а весь график H пересекает в 2 точках.

Прямая l_2 при всех $a>0$ пересекает гиперболу h_1 в двух точках (во II и IV квадрантах). В зависимости от значений a гиперболу h_2 она может пересекать в двух точках (в I квадранте), в одной точке B (точка касания) и не пересекать. Рассмотрим пересечение l_2 с h_2:

$$\begin{cases} x+y=\frac{2}{a}, \\ y=\frac{a}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{2}{a}, \\ xy=a. \end{cases} \qquad (2)$$

В соответствии с теоремой Виета пара $(x;y)$ является решением этой системы тогда и только тогда, когда числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2-\frac{2}{a}t+a=0$. Его дискриминант $D=\frac{4}{a^2}-4a=\frac{4-4a^3}{a^2}$ положителен при $a<1$, равен нулю при $a=1$ и отрицателен при $a>1$.

Следовательно,

при $a<1$ квадратное уравнение имеет два различных корня $t=x$ и $t=y$; пара $(x;y)$ является решением системы (2); ввиду симметрии системы относительно x и y пара $(y;x)$ тоже является ее решением, так что система (2) имеет два различных решения $(x;y)$ и $(y;x)$, то есть прямая l_2 пересекает гиперболу h_2 в двух точках, а весь график H в 4 точках;

при $a=1$ квадратное уравнение имеет один корень $t=x=y$; решением системы (1) является одна пара $(x;x)$, то есть прямая l_2 пересекает гиперболу h_2 в одной точке (точка

касания B на биссектрисе I и III координатных углов), а весь график H в 3 точках;

при $a > 1$ квадратное уравнение не имеет корней, система (2) не совместна, то есть прямая l_2 не пересекает гиперболу h_2, а весь график H пересекает в 2 точках.

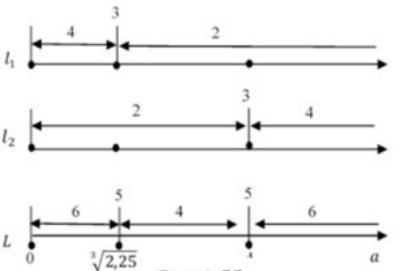


Рис.1.55

Для каждой прямой l_1 и l_2 количество точек ее пересечения с графиком H в зависимости от значения $a > 0$ изобразим (рис.1.55) на числовой прямой $0a$ (на интервалах и в отдельных точках). Сложив количества точек пересечения на интервалах и в отдельных точках, получим количество точек пересечения всего графика L с графиком H. По результату видим, что ровно 6 точек пересечения имеются при $a \in \left(0; \frac{4}{9}\right) \cup (1; +\infty)$. Значит, данная система имеет ровно 6 решений при $0 < a < \frac{4}{9}$ и $a > 1$.

Ответ: $0 < a < \frac{4}{9}$ и $a > 1$.

Вариант 50

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay + ax + 3)(y + x - a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет от одного до пяти решений.

Решение.

Из второго уравнения видим, что должно быть $a \geq 0$. При

$a = 0$ система имеет вид $\begin{cases} y + x = 0, \\ xy = 0 \end{cases}$ и имеет единственное решение $(x;\ y) = (0; 0)$. Далее считаем, что $a > 0$.

Задачу будем решать графически (рис.1.56).

Первое уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x + y = -\frac{3}{a}, \\ x + y = a. \end{array}\right.$$

Ее график $L = l_1 \cup l_2$ прелставляет собой пару параллельных прямых: прямая l_1 с уравнением $x + y = -\frac{3}{a}$ проходит через точки $\left(-\frac{3}{a}; 0\right)$ и $(0; -\frac{3}{a})$, прямая l_2 с уравнением $x + y = a$ – через точки $(a; 0)$ и $(0; a)$ (параллельность следует, например, из того, что при пересечении их осью абсцисс внутренние накрест лежащие углы равны по 45°). При всех значениях a эти прямые находятся по разные стороны от начала координат, так как $-\frac{3}{a} < 0$ и $a > 0$ (совпасть не могут, так как равенство $-\frac{3}{a} = a$ при $a > 0$ невозможно).

Второе уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} xy = -a \\ xy = a. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\frac{a}{x}, \\ y = \frac{a}{x}. \end{array}\right.$$

Ее график $H = h_1 \cup h_2$ прелставляет собой пару гипербол: гипербола h_1 с уравнением $y = -\frac{a}{x}$ с ветвями во II и IV квадрантах и гипербола h_2 с уравнением $y = \frac{a}{x}$ с ветвями в I и III квадрантах.

Решениями данной системы являются точки $(x; y)$, в которых пересекаются два графика L и H.

Прямая l_1 при всех значениях $a > 0$ пересекает гиперболу h_1 в двух точках (во II и IV квадрантах). В зависимости от значений a гиперболу h_2 она может пересекать в двух точках (в III квадранте), в одной точке A (точка касания) и не пересекать.

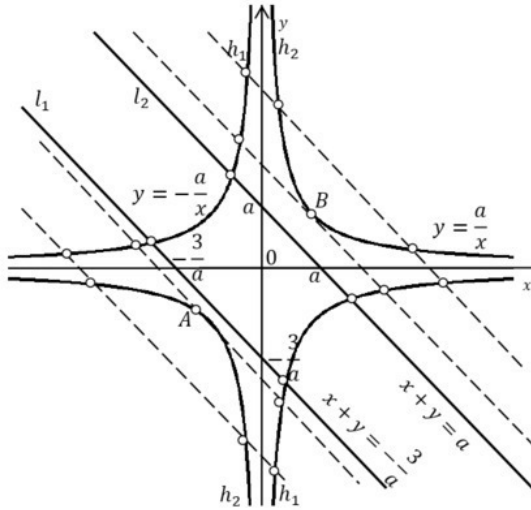


Рис.1.56

Рассмотрим пересечение l_1 с h_2:

$$\begin{cases} x+y=-\frac{3}{a}, \\ y=\frac{a}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-\frac{3}{a}, \\ xy=a. \end{cases} \qquad (1)$$

В соответствии с теоремой Виета пара $(x;y)$ является решением этой системы тогда и только тогда, когда числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2+\frac{3}{a}t+a=0$. Его дискриминант $D=\frac{9}{a^2}-4a=\frac{9-4a^3}{a^2}$ положителен при $a<\sqrt[3]{2{,}25}$, равен нулю при $a=\sqrt[3]{2{,}25}$ и отрицателен при $a>\sqrt[3]{2{,}25}$.

Следовательно,

при $0<a<\sqrt[3]{2{,}25}$ квадратное уравнение имеет два различных корня $t=x$ и $t=y$; пара $(x;y)$ является решением системы (1); ввиду симметрии системы относительно x и y пара $(y;x)$ тоже является ее решением, так что система (1)

имеет два различных решения $(x;y)$ и $(y;x)$, то есть прямая l_1 пересекает гиперболу h_2 в двух точках, а весь график H в 4 точках;

при $a=\sqrt[3]{2{,}25}$ квадратное уравнение имеет один корень $t=x=y$; решением системы (1) является одна пара $(x;x)$, то есть прямая l_1 пересекает гиперболу h_2 в одной точке (точка касания A на биссектрисе I и III координатных углов), а весь график H в 3 точках;

при $a>\sqrt[3]{2{,}25}$ квадратное уравнение не имеет корней, система (1) не совместна, то есть прямая l_1 не пересекает гиперболу h_2, а весь график H пересекает в 2 точках.

Прямая l_2 при всех $a>0$ пересекает гиперболу h_1 в двух точках (во II и IV квадрантах). В зависимости от значений a гиперболу h_2 она может пересекать в двух точках (в I квадранте), в одной точке B (точка касания) и не пересекать. Рассмотрим пересечение l_2 с h_2:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ y=\frac{a}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a, \\ xy=a. \end{cases} \qquad (2)$$

В соответствии с теоремой Виета пара $(x;y)$ является решением этой системы тогда и только тогда, когда числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2-at+a=0$. Его дискриминант $D=a^2-4a$ положителен при $a>4$, равен нулю при $a=4$ и отрицателен при $a<4$.

Следовательно,

при $a>4$ квадратное уравнение имеет два различных корня $t=x$ и $t=y$; пара $(x;y)$ является решением системы (2); ввиду симметрии системы относительно x и y пара $(y;x)$ тоже является ее решением, так что система (2) имеет два различных решения $(x;y)$ и $(y;x)$, то есть прямая l_2 пересекает гиперболу h_2 в двух точках, а весь график H в 4 точках;

при $a=4$ квадратное уравнение имеет один корень $t=x=y$; решением системы (1) является одна пара $(x;x)$, то

есть прямая l_2 пересекает гиперболу h_2 в одной точке (точка касания B на биссектрисе I и III координатных углов), а весь график H в 3 точках;

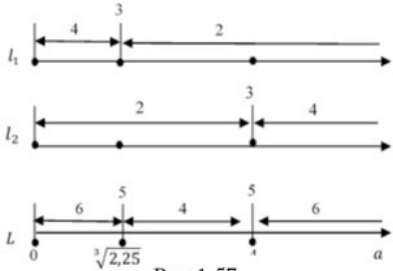


Рис.1.57

при $a < 4$ квадратное уравнение не имеет корней, система (2) не совместна, то есть прямая l_2 не пересекает гиперболу h_2, а весь график H пересекает в 2 точках.

Для каждой прямой l_1 и l_2 количество точек ее пересечения с графиком H в зависимости от значения $a > 0$ изобразим (рис.1.57) на числовой прямой $0a$ (на интервалах и в отдедьных точках). Сложив количества точек пересечения на интервалах и в отдельных точках, получим количество точек пересечения всего графика L с графиком H. По результату видим, что 5 и менее точек пересечения имеются при $a \in [\sqrt[3]{2,25};\ 4]$. Значит, при $a > 0$ данная система имеет до 5 решений при $a \in [\sqrt[3]{2,25};\ 4]$. Вспомним, что при $a = 0$ имеется еще одно решение, так что получаем ответ $a \in \left[\sqrt[3]{2,25};\ 4\right] \cup \{0\}$.

Ответ: $\sqrt[3]{2,25} \le a \le 4$ и $a = 0$.

2. Нестандартные задачи

2.1. Задачи пункта 5.6 «Арифметика и алгебра» из сборника И.В.Ященко ЕГЭ 2019

5.6.1

Число умножили на сумму его цифр и получили 10530. Найдите это число.

Решение.

Здесь подразумевается натуральное число. Пусть x – искомое число, S – сумма его цифр. Тогда $10530 = x \cdot S$. Отсюда следует, во-первых, что число S является одним из делителей d числа 10530 и, во-вторых, S является суммой цифр числа $x = \frac{10530}{S}$. Значит, если найдется делитель d, равный сумме цифр числа $\frac{10530}{d}$, то это число $\frac{10530}{d}$ и будет искомым числом x.

Чтобы найти делители числа 10530, разложим его на простые множители:

$$10530 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 13.$$

Число имеет много делителей поэтому заметим, что число x может быть не более чем 5-значным, так что сумма его цифр $S \le 5 \cdot 9 = 45$, и мы можем ограничиться рассмотрением делителей, не превосходящих 45. Для удобства составим таблицу значений делителей d, чисел $\frac{10530}{d}$ и сумм цифр этих чисел. Для составления списка делителей d придется испытать каждое натуральное число от 1 до 45,

Делитель d	$\frac{10530}{d}$	Сумма цифр числа $\frac{10530}{d}$
1	10530	9
2	5265	18
3	3510	9
5	2106	9
6	1755	18
9	**1170**	9
10	1053	9
13	810	9
15	702	9
18	**585**	18
26	405	9
27	390	12
30	-	-
39	-	-
45	-	-

Табл.2.1

проверяя, может ли оно быть составлено из множителей разложения $2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 13$ без привлечения посторонних множителей (например, $18 = 2 \cdot 3^2 \Rightarrow 18$ – делитель, $21 = 3 \cdot 7 \Rightarrow 21$ – не делитель). Значения $d = 30, 39, 45$ можно не рассматривать, так как при этих значениях d не может равняться сумме цифр числа $\frac{10530}{d}$ (у трехзначного числа $\frac{10530}{d}$ сумма цифр не превосходит $3 \cdot 9 = 27$).

Из табл.2.1 видим, что делитель d равен сумме цифр числа $\frac{10530}{d}$ в двух случаях: при $d = 9$ и $d = 18$. Соответственно имеем два ответа $x = 1170$ и $x = 585$.

Ответ: 585 и 1170.

Примечание. В сборнике не указан ответ 1170.

5.6.2

Произведение числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 5848. Найдите это число.

Решение.

Здесь имеется в виду целое число (для дробного или иррационального числа задание условия было бы не корректным). Знак числа не имеет значения и потому можно считать число неотрицательным. Число не может быть однозначным (наибольшее произведение однозначного числа на себя равно $9 \cdot 9 < 5848$). Оно не может быть и трехзначным. В самом деле, оно не может оканчиваться цифрой 0, так как произведение 5848 не оканчивается цифрой 0; наименьшее трехзначное число, не оканчивающаяся цифрой 0 – это 101, а произведение $101 \cdot 101 > 5848$. Итак, искомое число должено быть двузначным. Пусть x и y – его цифры. Тогда

$(10x + y)(10y + x) = 5848 \Rightarrow 101xy + 10(x^2 + y^2) = 5848.$

Поскольку второе слагаемое оканчивается цифрой 0, первое слагаемое должно оканчиваться цифрой 8. Из равенства $101xy = 100xy + xy$ видим, что $100xy$ оканчивается двумя нулями, значит, xy должно оканчиваться цифрой 8. Для этого имеются следующие варианты пар (x, y): (1, 8), (2, 4), (2, 9), (3,

6), (4, 7), (6, 8) (симметричные им пары (8, 1), … можно не рассматривать). Проверяем эти варианты: произведения $18 \cdot 81$, $24 \cdot 42$, $29 \cdot 92$, $36 \cdot 69$, $47 \cdot 74$ не дают 5848, но $68 \cdot 86 = 5848$.

Ответ: 68 и 86.

5.6.3

Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения.

Решение.

Пусть $P = p_1 p_2 \ldots p_k$ – произведение k различных простых чисел

$$p_1, p_2, \ldots, p_k \ (k \geq 2),$$

удовлетворяющее условию задачи. Отметим, что все эти числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$ являются делителями числа P. Все другие возможные делители представляют собой произведения этих простых делителей в разных сочетаниях по 2, по 3 и т.д. Поскольку числа различные, то их можно расположить в возрастающем порядке: $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ (рис.2.2). Вспомним, что все простые числа, кроме 2, нечетные,

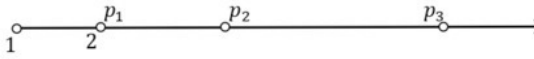


Рис.2.2

значит, второй множитель p_2 является нечетным числом (независимо от того, четный первый множитель (то есть 2) или нечетный). Поскольку $p_2 - 1$ – четное число, а по условию произведение P ему кратно, то само P является четным числом. Это значит, что простое число 2 обязано присутствовать в составе произведения P как первый множитель: $p_1 = 2$ (при любом $k \geq 2$).

Выясним теперь, каким должен быть второй множитель p_2.

Число $p_2 - 1$ по условию является делителем числа P; оно принадлежит интервалу $(1,\ p_2)$, так как $p_2 - 1 < p_2$ и

$$p_2 > 2 \Rightarrow p_2 - 1 > 1.$$

Но число $p_1 = 2$ является единственным на интервале $(1,\ p_2)$ делителем числа P.

(p_2 не содержится в интервале $(1,\ p_2)$, все другие делители – как простые $p_3,\ p_4, \ldots$, так и составленные из них – превосходят p_2).

Значит, $p_2 - 1 = 2$ и потому $p_2 = 3$ (при любом $k \geq 2$). Таким образом, если существует второй множитель, удовлетворяющий условию задачи, то обязан равняться 3, а произведение P должно иметь вид $P = 2 \cdot 3 \cdot \ldots$. Если $k = 2$, то произведение равно $P = 2 \cdot 3 = 6$. Оно удовлетворяет условию задачи (делится на $2 - 1$ и $3 - 1$).

Рассмотрим возможность $k \geq 3$. Число $p_3 - 1$, являющееся по условию делителем числа P, принадлежит интервалу $(p_2,\ p_3)$.

(В самом деле, $p_3 > p_2 \Leftrightarrow p_3 \geq p_2 + 1 \Leftrightarrow p_3 - 1 \geq p_2$. Здесь равенство невозможно, так как $p_3 - 1$ четное, а p_2 нечетное числа. Следовательно, $p_3 - 1 > p_2$. С другой стороны, $p_3 - 1 < p_3$, так что $p_3 - 1 \in (p_2,\ p_3)$).

В этом интервале может содержаться только один делитель числа P– это делитель $p_1 p_2 = 6$.

(В самом деле, $p_1 p_2 > p_2$, так что $p_1 p_2$ может содержаться в интервале $(p_2,\ p_3)$. Но может и не содержаться, если $p_1 p_2 \geq p_3$).

Другие делители не содержатся:

$p_1, p_2, p_3, \ldots$ не содержатся,

$p_1 p_3,\ p_1 p_4,\ \ldots$ не содержатся, так как превосходят p_3,

тем более не содержатся все другие делители, составленные из двух, трех или более простых чисел $p_1, p_2, \ldots,\ p_k$.)

Следовательно, возможно только равенство $p_3 - 1 = 6$. Значит, если существует третий множитель, удовлетворяющий условию задачи, то обязан равняться 7, а произведение P должно иметь вид $P = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \ldots$. Если $k = 3$, то произведение $P = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. Оно удовлетворяет условию задачи (делится на $2 - 1$, $3 - 1$ и $7 - 1$).

Пусть $k \geq 4$. Число $p_4 - 1$, являющееся по условию делителем числа P, принадлежит интервалу (p_3, p_4) (проверяется аналогично прелыдущему случаю). Оно четное, а в этом интервале из четных делителей числа P, могут содержаться только делители $p_1p_3 = 14$ и $p_1p_2p_3 = 42$.

(Четные делители получаются только в сочетании с $p_1 = 2$. Четный делитель $p_1p_2 = 6 < 7 \Rightarrow p_1p_2 < p_3$, другие четные делители с двумя простыми множителями p_1p_4, p_1p_5, ..., а также с тремя и более простыми множителями $p_1p_2p_4$, $p_1p_3p_4$, ... превосходят p_4)

Значит, возможны только варианты $p_4 - 1 = 14$ и $p_4 - 1 = 42$. Вариант $p_4 = 15$ отпадает, так как p_4 должно быть простым числом, а 15 – составное. Остается вариант $p_4 = 43$. Следовательно, если существует четвертый множитель, удовлетворяющий условию задачи, то это должно быть число 43, а произведение P в этом случае должно иметь вид $P = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43$.... Если $k = 4$, то произведение $P = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 = 1806$. Оно удовлетворяет условию задачи (делится на $2 - 1, 3 - 1, 7 - 1$ и $43 - 1$).

Если $k \geqslant 5$, то число $p_5 - 1$, являющееся по условию делителем числа P, принадлежит интервалу (p_4, p_5) (проверяется аналогично предыдущим случаям). Оно четное, а в этом интервале из четных делителей числа P могут содержаться только делители

$p_1p_4 = 86$, $p_1p_2p_4 = 258$, $p_1p_3p_4 = 602$ и $p_1p_2p_3p_4 = 1806$

(можно проверить, перебирая четные делители с двумя, тремя и более простыми множителями). Значит, возможны только варианты $p_5 - 1 = 86$, 258, 602 и 1806. Каждое из чисел 87, 259, 603, 1807 является составным. Значит, не существует пятого множителя, удовлетворяющего условию задачи, так что у числа P не может быть более четырёх различных простых делителей.

Ответ: 6, 42, 1806.

Примечание. В сборнике дан ответ 2, 6, 42, 1806 при условии, что число 2 можно считать произведением из одного множителя.

5.6.4

Решите уравнение в натуральных числах:

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

Решение.

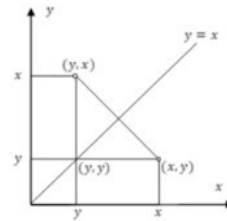


Рис.2.3

Заметим, что уравнение имеет симметрию: если (x, y) – его решение, то (y, x) тоже является решением. На координатной плоскости xy точки (x, y) и (y, x) симметричны относительно прямой $y = x$. (В прямоугольном равнобедренном треугольнике с вершинами $(x, y), (y, y)$ и (y, x) отрезок биссектрисы $y = x$ является одновременно высотой и медианой и потому прямая $y = x$ проходит через середину отрезка $[(x, y), (y, x)]$ перпендикулярно к нему).

Следовательно, если найдем все решения при $y \le x$, то есть решения (x, y), расположенные ниже прямой $y = x$, то автоматически найдутся и все остальные решения (y, x), расположенные выше прямой $y = x$.

Итак, пусть $y \le x$. Из очевидного неравенства $(x - y)^2 \ge 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \ge 0$ видим, что $x^2 - xy + y^2 \ge xy$. Значит, для левой части данного уравнения выполняется неравенство $x + y \ge xy$. Так как $y \le x$, то $x + y \le x + x = 2x$. Получаем неравенства $2x \ge x + y \ge xy$, из которых следует, что $2x \ge xy$. Поскольку $x, y \in N$, то имеем равносильное неравенство $y \le 2$. Его натуральные решения $y = 1$ и $y = 2$. Делаем вывод: если решения (x, y) ниже прямой $y = x$ существуют, то только при $y = 1$ и $y = 2$.

При $y = 1$ из данного уравнения получаем $x + 1 = x^2 - x + 1$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow x = 2$ (выбрали натуральный корень). Подстановкой убеждаемся, что пара (2, 1) является решением данного уравнения.

При $y = 2$ получаем $x + 2 = x^2 - 2x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow x = 2$ (выбрали $x \geq y$: $2 \geq 2$. Здесь $x = 1$ не подходит, так как $x < y$: $1 < 2$). Подстановкой убеждаемся, что пара (2, 2) является решением данного уравнения.

К найденным решениям (2, 1) и (2, 2) добавим симметричные (относительно прямой $y = x$) решения (1, 2) и (2, 2). Получим все решения (1, 2), (2, 1) и (2, 2).

Ответ: (1, 2), (2, 1) и (2, 2).

5.6.5

Найдите все возрастающие конечные арифметические прогрессии, которые состоят из простых чисел и у которых количество членов
больше, чем разность прогрессии.

Решение.

Пусть d – разность прогрессии, n – количество ее членов.
По условию $n > d$.

Если $d = 1$, то в прогрессии есть чётные числа.

(Неравенство $n > d = 1$ означает, что прогрессия содержит не менее двух членов. Если первый член a_1 окажется нечетным числом, то второй член $a_1 + 1$ будет четным)

Поскольку единственное чётное простое число – это 2, то именно оно является одним из членов прогрессии. Меньший член $2 - 1 = 1$ невозможен, так как 1 не является простым числом. Следующий член $2 + 1 = 3$ – простое число, подходит. Дальше прогрессия обрывается, так как $3 + 1 = 4$ – число составное. Получаем прогрессию (2, 3).

При рассмотрении случаев $d \geq 2$ привлечем известную теорему о делении с остатком:

Каковы бы ни были целое число m и целое число $n \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить m на n с остатком: найти такие два целых числа q (частное) и r (остаток), что $m = nq + r$, $0 \leq r < |n|$.

Из этой теоремы следует, что разность двух целых чисел m' и m'' делится на натуральное число n нацело тогда и только тогда, когда m' и m'' имеют одинаковые остатки при делении на n.

(Доказатедьство. Сначала вспомним, что если $a, b, c \in Z, a \vdots c,\ b \vdots c$, то $a + b \vdots c$. Отсюда следует, что если сумма $S = (a + b) \vdots c$ и одно из слагаемых $a \vdots c$, то и второе слагаемое $b \vdots c$. Это потому, что в сумме $b = S + (-a)$ оба слагаемых нацело делятся на c. Пусть $m' = nq' + r',\ 0 \le r' < n,\ \ m'' = nq'' + r'',\ 0 \le r'' < n$. Если $m'- m''$ делится на n нацело, то $n(q' - q'') + (r' - r'')$ делится на n нацело, поэтому и второе слагаемое $r' - r''$ делится на n нацело. Но $-n < r' - r'' < n$, а на промежутке $(-n, n)$ только одно число 0 делится на n нацело. Значит, $r' - r'' = 0 \Rightarrow r' = r''$. Обратно, если $r' = r''$, то $m'- m'' = n(q' - q'')$, то есть $m'- m''$ делится на n нацело).

Используя это свойство остатков, докажем вспомогательное утверждение:

В конечной арифметической прогрессии из натуральных чисел с разностью $d \in N$ любые $d - 1$ (или $d + 1$) подряд идущие члены при делении на $d - 1$ (соответственно на $d + 1$) дают попарно различные остатки.

Пусть подряд идут $d - 1$ членов

$$a, a + d, \dots, a + kd, \dots, a + ld, \dots, a + (d - 2)d,\ 0 \le k < l \le d - 2.$$

Допустим, что члены $a + kd$ и $a + ld$ дают одинаковые остатки при делении на $d - 1$. Тогда их разность $(l - k)d$ делится нацело на $d - 1$, то есть $\frac{(l-k)d}{d-1} \in Z$. Но $\frac{(l-k)d}{d-1} = \frac{(l-k)(d-1+1)}{d-1} = l - k + \frac{(l-k)}{d-1}$, а с учетом неравенств $0 < l - k \le d - 2 - 0$ имеем $0 < \frac{(l-k)}{d-1} \le \frac{d-2}{d-1} < 1$, то есть получили сумму целого числа $l - k$ и дроби между 0 и 1, так что $\frac{(l-k)d}{d-1}$ не $\in Z$. Значит, допущение неверно и *утверждение для $d - 1$ доказано.*

В случае $d + 1$ имеем $a, a + d, \dots, a + kd, \dots, a + ld, \dots, a + dd$, $0 \le k < l \le d$. Допуская, что члены $a + kd$ и $a + ld$ дают одинаковые остатки при делении на $d + 1$, получим, что

$$\frac{(l-k)d}{d+1} \in Z.$$

Но $\frac{(l-k)d}{d+1} = \frac{(l-k)(d+1-1)}{d+1} = (l-k) - \frac{(l-k)}{d+1}$, а с учетом неравенств $0 < l-k \le d-0$ имеем $0 < \frac{(l-k)}{d+1} \le \frac{d}{d+1} < 1$, то есть число $\frac{(l-k)d}{d+1}$ оказывается разностью между целым числом $l-k$ и дробью $\frac{(l-k)}{d+1}$ между 0 и 1, так что $\frac{(l-k)d}{d+1}$ не $\in Z$. Значит, допущение неверно и *утверждение для* $d+1$ *тоже доказано.*

Если $d = 2$, то $d+1 = 2+1 = 3$, так что три последовательные члена прогрессии дают при делении на 3 попарно различные остатки 0, 1 и 2. Поэтому один из них дает остаток 0, то есть делится на 3. Но член прогрессии – простое число и потому может равняться только 3. Меньший член $3-2=1$ невозможен, так как 1 не является простым числом. Следующие члены $3+2=5$ и $5+2=7$ – простые числа, подходят. Дальше прогрессия обрывается, так как $7+2=9$ – составное число. Получаем прогрессию (3, 5, 7).

Пусть $d > 2$. Рассмотрим последние $d-1$ членов прогрессии. Так как $n > d$, то прогрессия содержит не меньше $d+1$ членов, и группа из последних $d-1$ ее членов начинается не раньше чем с третьего члена $a+2d$ (пропускаются не менее $d+1-(d-1) = 2$ членов). Поэтому все последние $d-1$ членов больше d. При делении на $d-1$ они дают попарно различные остатки $0, 1, 2, \ldots, d-2$, поэтому один из них дает остаток 0, то есть делится на $d-1$. Но этот член, будучи простым числом, делится только на 1 и на себя, а на меньшее число $d-1 \ne 1$ делиться не может (у нас $d > 2 \Rightarrow d-1 > 1$). Противоречие означает, что $d > 2$ не может быть.

Ответ: (2, 3), (3, 5, 7).

5.6.6

Каждое из чисел 2, 3, ..., 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, ..., 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую

по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

Наибольшая сумма получится, если все произведения будут со знаком плюс. Сумму всех произведений можно получить, умножив число $2+3+\cdots+7$ на $13+14+\cdots+21$:

$$S=(2+3+\cdots+7)(13+14+\cdots+21)=\frac{2+7}{2}6\cdot\frac{13+21}{2}9=4131.$$

(по формуле суммы n членов арифметической прогрессии с первым членом a_1 и последним членом a_n: $S=\frac{a_1+a_n}{2}n$)

Эта сумма нечетна, значит, число нечетных слагаемых $3\cdot13,\ 3\cdot15,\ \ldots,\ 7\cdot21$ нечетно (сумма четного числа нечетных чисел была бы четной). При любом изменении знака четность сохраняется (например, 26 и -26 оба четны, 39 и -39 оба нечетны). Поэтому при любом изменении знака сумма S, изменяя свою величину, всегда остается нечетным числом. Следовательно, не может оказаться равной 0 – четному числу. Это значит, что число 0 не может быть наименьшей по модулю суммой. А число 1 может, нетрудно подобрать знаки в скобках так, чтобы скобки равнялись 1 или -1, например:

$S=(-2-3-4-5+6+7)(-13-14-15-16+17-18+19+20+21)=-1\cdot1=-1$, $|S|=1$. Знаки перед произведениями окажутся поставленными так:

$$+2\cdot13,+2\cdot14,\quad\ldots,\quad-5\cdot17,\ldots,+7\cdot21.$$

Ответ: 1, 4131.

5.6.7

Перед каждым из чисел 14, 15, ..., 20 и 6, 7, . . ., 10 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

Наибольшую сумму получим, если все числа первого набора

взяты с плюсами, а второго – с минусами (то есть числа второго набора прибавляются). Найдем эту сумму.

К 14 прибавляются 6, 7, . . ., 10: $(14+6)+(14+7)+\cdots+(14+10)=5\cdot 14+(6+7+\ldots+10)$,

К 15 прибавляются 6, 7, . . ., 10: $(15+6)+(15+7)+\cdots+(15+10)=5\cdot 15+(6+7+\ldots+10)$,

...

К 20 прибавляются 6, 7, . . ., 10: $(20+6)+(20+7)+\cdots+(20+10)=5\cdot 20+(6+7+\ldots+10)$.

Получается сумма $S=5(14+15+\cdots+20)+7(6+7+\ldots+10)=5\cdot\frac{14+20}{2}\cdot 7+7\cdot\frac{6+10}{2}\cdot 5=875$.

(Использована формула суммы n членов арифметической прогрессии с первым членом a_1 и последним членом a_n: $S=\frac{a_1+a_n}{2}n$)

Эта сумма нечетна, значит, число нечетных слагаемых $14+7,\ 14+9,\ \ldots,\ 20+9$ нечетно (сумма четного числа нечетных чисел была бы четной). При любом изменении знака четность сохраняется (например, 20 и -20 оба четны, 21 и -21 оба нечетны). Поэтому при любом изменении знака сумма S, изменяя свою величину, всегда остается нечетным числом. Следовательно, не может оказаться равной 0 – четному числу. Это значит, что число 0 не может быть наименьшей по модулю суммой. А число 1 может, например при следующей расстановке знаков в скобках (в скобках организуем -11 и 8):

$$S=5(-14-15+16-17+18-19+20)+7(+6-7+8-9+10)=5\cdot(-11)+7\cdot 8=1.$$

Знаки перед данными числами окажутся расставленными так:

$$-14,-15,+16,-17,+18,-19,+20;\ \ -6,+7,-8,+9,-10.$$

Ответ: 1 и 875.

5.6.8

Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющих равенству

$$\overline{ab}=a^b+23$$

(в левой части равенства стоит число, полученное приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Решение.

Отметим сначала, что случай $a = 1$ невозможен, так как в равенстве $\overline{1b} = 24$ левое число начинается с цифры 1, а правая – с цифры 2. Далее считаем, что $a \geq 2$. Отдельно рассмотрим случаи однозначного и многозначного b.

1) b – однозначное $(1 \leq b \leq 9)$. В этом случае $\overline{ab} = 10a + b$, поэтому

$$10a + b = a^b + 23.$$

Сгруппируем слагаемые с участием a:

$$a(10 - a^{b-1}) = 23 - b. \qquad (1)$$

Поскольку $b \leq 9$, то $23 - b > 0$ и потому $a(10 - a^{b-1}) > 0$. При больших значениях b это неравенство нарушается из-за того, что становится $a^{b-1} > 10$. Узнаем, при каких значениях b это имеет место. Так как $a \geq 2$, то $a^{b-1} \geq 2^{b-1}$. Правая часть больше десяти при $b \geq 5$. Значит, при $b \geq 5$ неравенство нарушается, и остается рассмотреть значения $b = 1, 2, 3, 4$.

$b = 1$. (1) $\Rightarrow a(10 - a^0) = 23 - 1 \Leftrightarrow 9a = 22 \Leftrightarrow a = \frac{22}{9}$ не $\in N$, нет нужной пары (a, b).

$b = 2$. (1) $\Rightarrow a(10 - a) = 23 - 2 \Leftrightarrow a^2 - 10a + 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = 7 \end{array}\right.$.

Пары $(3,\ 2)$ и $(7,\ 2)$ подходят: $32 = 3^2 + 23,\ 72 = 7^2 + 23$.

$b = 3$. (1) $\Rightarrow a(10 - a^2) = 23 - 3 \quad \Leftrightarrow a(10 - a^2) = 20$. Видим, что a является делителем числа 20 и потому может принимать только значения 2, 4, 5, 10, 20. Из них только при $a = 2$ левая часть равенства положительна. Проверяем это значение: $2(10 - 2^2) \neq 20$. Подходящей пары (a, b) нет.

$b = 4$. (1) $\Rightarrow a(10 - a^3) = 23 - 4 \quad \Leftrightarrow a(10 - a^3) = 19$. 19 – простое число, и его делитель a может равняться только 1 и 19. Оба эти значения последнему равенству не удовлетворяют. Подходящей пары (a, b) нет.

2) $b-$ k $-$значное $(k \geq 2)$: $b \geq 10$. Пусть при этом $a-n$-значное число $(n \geq 1)$. Выведем неравенство, связывающее b, k и n. Имеем $\overline{ab} = a^b + 23 \Rightarrow a^b < \overline{ab}$. Прологарифмируем неравенство по основанию10:

$$blga < lg\overline{ab}. \qquad (2)$$

Так как $\overline{ab}$ – $n+k-$значное число, то $\overline{ab} < 10^{n+k}$. Отсюда получаем $n+k > lg\overline{ab}$ и, с учетом неравенства (2),

$$n+k > blga. \qquad (3)$$

Надо теперь избавиться от a. Для этого используем неравенство для n-значного a: $a \geq 10^{n-1}$. Из него получаем $lga \geq n-1$ и теперь неравенство (3) преобразуется:

$$n+k > b(n-1) \text{ (от } a \text{ избавились).}$$

Переделаем это неравенство так, чтобы b, k и n оказались в трех отдельных скобках: $n+k+1-1 > b(n-1) \Leftrightarrow$

$$(b-1)(n-1) < (k+1). \qquad (4)$$

Заявленное неравенство получено. Чтобы избавиться в нем еще и от b, свяжем его с числом его знаков k неравенством вида $b \geq k+m$. Число m подберем так, чтобы это неравенство выполнялось при всех $k \geq 2$. Так как $b \geq 10^{k-1}$, то достаточно обеспечить неравенство $10^{k-1} \geq k+m \Leftrightarrow 10^{k-1} - k \geq m$. Функция непрерывного аргумента $f(x) = 10^{x-1} - x$ при $x \geq 2$ возрастает (производная $10^{x-1}ln10 - 1 \geq 10^{2-1}ln10 - 1 = 10ln10 - 1 > 0$), поэтому при $k \geq 2$ имеем неравенство $f(k) \geq f(2)$, то есть $10^{k-1} - k \geq 8$ (подобрали m). Итак, при всех $k \geq 2$

$$b \geq k+8.$$

Теперь (4) $\Rightarrow k+1 > (k+8-1)(n-1) \Leftrightarrow k+1 > (k+7)(n-1)$. Это неравенство возможно только при $n=1$, следовательно, в рассматриваемом случае число a может быть только однозначным.

При $n=1$ неравенство (3) принимает вид $1+k > blga$. Здесь $b \geq 10^{k-1}$,

$lga \geq lg2$, поэтому $1+k > 10^{k-1}\, lg2$. Но это невозможно, так как при всех $k \geq 2$ выполняется противоположное неравенство.

Для доказательства этого сначала отметим, что $lg2 > \frac{3}{10}$ ($1024 > 1000 \Leftrightarrow 2^{10} > 10^3 \Rightarrow 10lg2 > 3$). Функция непрерывного аргумента $f(x) = 10^{x-1}lg2 - x - 1$ при $x \geq 2$ возрастает (производная $10^{x-1}ln10lg2 - 1 \geq 10^{2-1}ln10 \cdot \frac{3}{10} - 1 = 3ln10 - 1 > 0$), поэтому при $k \geq 2$ имеем неравенство $f(k) \geq f(2)$, то есть $10^{k-1}lg2 - k - 1 \geq 10^{2-1}lg2 - 2 - 1$. Поскольку $10^{2-1}lg2 - 2 - 1 > 10 \cdot \frac{3}{10} - 3 = 0$, отсюда следует наше противоположное неравенство $10^{k-1}lg2 > k + 1$.

Итак, при многозначном b нет подходящих пар (a, b).

Другое решение п. 2). Пусть для некоторого k –значного b ($k \geq 2$) выполнено равенство $\overline{ab} = a^b + 23 \Leftrightarrow 10^k a + b = a^b + 23$ при $a \geq 2$. Посмотрим, какими могут быть значения a. Перепишем равенство в виде $a = \frac{a^b + 23 - b}{10^k}$. Учитывая, что $10^{k-1} \leq b \leq 10^k - 1$, получим неравенство $a \geq \frac{a^{10^{k-1}} + 23 + 1 - 10^k}{10^k} > \frac{a^{10^{k-1}}}{10^k} - 1$. При $k \geq 2$ правая часть возрастает с возрастанием k. В самом деле, у функции непрерывного аргумента $f(x) = \frac{a^{10^{x-1}}}{10^x} - 1$ производная $f'(x) = \frac{a^{10^{x-1}} lna \cdot 10^{x-1} ln10 \cdot 10^x - a^{10^{x-1}} \cdot 10^x ln10}{10^{2x}} = \frac{a^{10^{x-1}} ln10}{10^x}(10^{x-1}lna - 1)$ при $x \geq 2$ положительна, так как $10^{x-1}lna \geq 10^{2-1}ln2 = ln2^{10} = ln1024 > lne = 1$. Следовательно, $f(k) \geq f(2) = \frac{a^{10}}{10^2} - 1$, так что

$$a > \frac{a^{10}}{10^2} - 1. \qquad (*)$$

Так как $a \geq 2$, то $(*) \Rightarrow a > \frac{2^{10}}{10^2} - 1 = 10{,}24 - 1 = 9{,}24 \Rightarrow a \geq 10$. Далее будем оценивать значение a степенями десятки. При этом используем неравенство $10^k - 1 > 10^{k-1}$, справедливое при всех $k \geq 2$.

1-й шаг. Так как $a \geq 10$, то $(*) \Rightarrow a > \frac{10^{10}}{10^2} - 1 = 10^8 - 1 > 10^7$.

2-й шаг. Так как $a > 10^7$, то $(*) \Rightarrow a > \frac{10^{70}}{10^2} - 1 = 10^{68} - 1 > 10^{67}$.

3-й шаг. Так как $a > 10^{67}$,то $(*) \Rightarrow a > \frac{10^{670}}{10^2} - 1 = 10^{668} - 1 > 10^{667}$.

На n –ом шаге получим степень

$$\underbrace{66\ldots66}_{n-1\text{ раз}}7 = 6\cdot 10^{n-1} + 6\cdot 10^{n-2} + \cdots + 6\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 7$$

$$= 6(10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1}) + 7 =$$

$$6\cdot 10\frac{10^{n-1}-1}{10-1} + 7 = \frac{20}{3}(10^{n-1} - 1) + 7,$$

так что

$$a > 10^{\frac{20}{3}(10^{n-1}-1)+7}.$$

Видим, что после достаточного числа шагов n значение a становится больше любого числа. Значит, равенство $\overline{ab} = a^b + 23$ не может выполняться ни при каком конечном значении $a \geq 2$.

Ответ: (3, 2) и (7, 2).

5.6.9

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Решение.

Пусть S – общее число учащихся группы, m_t и m_k – количества мальчиков, посетивших театр и кино соответственно, d_t и d_k – количества девочек, посетивших

театр и кино соответственно, d – общее число девочек в группе. Тогда

$$S \le m_t + m_k + d. \qquad (1)$$

По условию

$$m_t \le \frac{4}{13}(m_t + d_t),\ m_k \le \frac{2}{5}(m_k + d_k),$$

а так как $d_t \le d,\ d_k \le d,$ то

$$m_t \le \frac{4}{13}(m_t + d),\ m_k \le \frac{2}{5}(m_k + d).$$

Отсюда получаем $m_t \le \frac{4}{9}d,\ \ m_k \le \frac{2}{3}d,$ так что неравенство (1) преобразуется в неравенство

$$S \le \frac{4}{9}d + \frac{2}{3}d + d \Leftrightarrow S \le \frac{19}{9}d. \qquad (2)$$

Теперь можем дать ответ к пунктам а) и б). При $S = 20$ неравенство (2) принимает вид $20 \le \frac{19}{9}d.$ Отсюда получаем $d \ge 9\frac{9}{19}.$ Так как $d \in N,$ то это равносильно неравенству $d \ge 10.$ Это означает, что общее количество девочек не меньше 10, так что общее количество мальчиков не больше 10, так как всего 20 учащихся.

а) 10 мальчиков в группе могло быть. Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено:

$$\frac{4}{14} < \frac{4}{13},\ \frac{6}{16} < \frac{2}{5}.$$

б) Так как общее количество мальчиков не больше 10, то 10 и есть наибольшее количество мальчиков.

в) Из неравенства (2) следует, что $d \ge \frac{9}{19}S,$ то есть наименьшая доля девочек в группе может быть равной $\frac{9}{19}.$ Она действительно равна $\frac{9}{19}$ например, в группе из 19 учащихся, в которой 4 мальчика сходили только в театр, 6 мальчиков – только в кино, 9 девочек сходили и в театр, и в кино.

Ответ: а) Да. б) 10. в) $\frac{9}{19}.$

5.6.10

Моток верёвки режут без остатка на куски длиной не меньше 115 см, но не больше 120 см (назовём такие куски стандартными).

а) Некоторый моток верёвки разрезали на 23 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток верёвки?

б) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток верёвки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

Решение.

Пусть x – длина веревки. Она разрезается без остатка на n стандартных кусков тогда и только тогда, когда ее наименьшая длина равна $115n$ см, а наибольшая длина равна $120n$ см:

$$115n \le x \le 120n \qquad (1)$$

(условие разрезаемости).

а) Так как есть куски разной длины, то при $n = 23$ неравенства (1) оказываются строгими:

$$115 \cdot 23 < x < 120 \cdot 23.$$

(В самом деле, если не все куски равны, то по крайней мере один кусок больше 115 см и длина веревки оказывается больше $115 \cdot 23$ см, и по крайней мере один кусок меньше 120 см и длина веревки оказывается меньше $120 \cdot 23$ см).

Если разрезать на $n \ge 24$ одинаковых стандартных куска, то для длины одного куска $\frac{x}{n}$ получим неравенства

$$\frac{x}{n} < \frac{120 \cdot 23}{n} \le \frac{120 \cdot 23}{24} = 115,$$

а отсюда строгое неравенство $\frac{x}{n} < 115$, то есть имеем одинаковые нестандартные куски. На 23 одинаковых стандартных куска можно разрезать: $115 < \frac{x}{23} < 120$ (длина $\frac{x}{23}$ стандартная). Значит, наибольшее число одинаковых стандартных кусков, на которое можно разрезать данный

моток веревки, равно 23.

б) Обозначим $a_n = 115n,\ b_n = 120n$. Согласно условию (1),

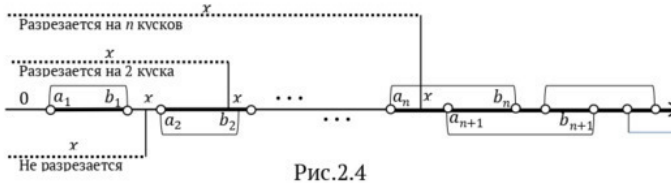


Рис.2.4

веревка разрезается на n стандартных кусков без остатка тогда и только тогда, когда ее длина x содержится в отрезке $[a_n, b_n]$.

Если $x \in [a_1, b_1]$, то веревка разрезается на 1 кусок (то есть сама веревка есть стандартный кусок), если $x \in [a_2, b_2]$, то веревка разрезается на 2 куска и т. д. Если x не попадает ни в один из отрезков $[a_n, b_n]$, то она не разрезается на стандартные куски без остатка (рис.2.4).

Просветы между отрезками $[a_n, b_n]$ («просветы неразрезаемости») исчезнут, когда начиная с некоторого значения n каждый отрезок $[a_n, b_n]$ будет пересекаться со следующим отрезком $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, то есть будет выполняться условие

$$a_{n+1} \le b_n \Leftrightarrow 115(n+1) \le 120n \Leftrightarrow n \ge 23.$$

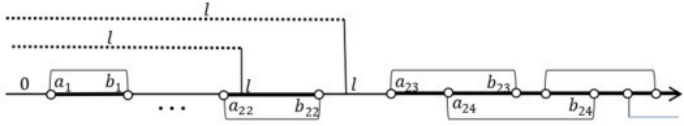


Рис.2.5

Значит, при $x \ge a_{23}$ значение x обязательно попадает в один из отрезков разрезаемости $[a_n, b_n]$. Число $l = a_{23}$ и будет искомым наименьшим значением длины веревки, удовлетворяющим условию б).

Действительно (рис.2.5), если $l = a_{23}$, то любую веревку с длиной $x > l$ можно разрезать на стандартные куски (x попадает в один из отрезков разрезаемости).

Если $l < a_{23}$, то не любая веревка с длиной $x > l$ разрезается как надо: найдется такая веревка с длиной $x > l$, которая не разрезается как надо. В самом деле, если $b_{22} \le l < a_{23}$, то любое $x \in (l,\ a_{23})$ является неразрезаемой длиной. Если же $l < b_{22}$, то любая длина $x \in (b_{22},\ a_{23})$ является неразрезаемой длиной (хотя тоже больше l).

Итак, $l = a_{23} = 115 \cdot 23 = 2\,645$

Ответ: а) 23. б) 2 645.

5.6.11

В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальные поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

Решение.

а) Разделим общую сумму в 600 тыс. руб. на 40, получим, что каждый должен получить по 15 тыс. руб. Сначала максимально возможному числу сотрудников выдадим премии одними 5-тыс. купюрами: 33 сотрудникам – по три 5-тыс. купюре. Оставшуюся одну 5-тыс. купюру выдадим одному из оставшихся 7 сотрудников, добавив десять 1-тыс. купюр.

Остальные 6 сотрудников получат свои премии 1-тыс. купюрами. Задание выполнимо.

б) Сумма, оставшаяся после выплаты 40 тыс. руб., будет равна 560 тыс. руб. При делении на 70 сотрудников получаем выплаты по 8 тыс. руб. Каждому можно выдать не более одной 5-тыс. купюре, и придется каждому выдать не менее трех 1-тыс. купюр. Для этого 1-тыс. купюр потребуется не менее $3 \cdot 70 = 210$, а их всего 100. Задание невыполнимо.

в) Для удобства перенумеруем сотрудников, и пусть $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots, S_n$ – произвольное распределение сумм между n сотрудниками: S_k тыс.руб. $(1 \le k \le n)$ – сумма для сотрудника с номером k.

Выделим в сумме S_k максимальное слагаемое, кратное 5 (в связи с наличием 5-тыс. купюр). Согласно теореме о делении с остатком

(Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых числа q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r$, $0 \le r < |b|$)

число S_k единственным образом представляется в виде

$$S_k = 5q_k + r_k, \text{ где } q_k \ge 0,\ 0 \le r_k \le 4.$$

Остаток r_k можно выдать только 1-тыс. купюрами (от 0 до 4 купюр). Сумму $5q_k$ можно выдать любыми купюрами.

Возможность намеченного распределения премий зависит от количества 1-тыс. купюр, необходимых для выдачи сумм остатков r_k. Это количество наибольшее, когда все остатки r_k равны 4. В этом случае на выдачу сумм остатков будет потрачены все 1-тысячные купюры, так что будет равенство

$$100 = r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 4n \Rightarrow n = 25.$$

Если количество сотрудников $n \le 25$, то реализуется любое распределение. Можно поступить так.

Сначала раздаются суммы остатков r_k – для этого 1-тысячных купюр хватит при любом раскладе (часть таких купюр может остаться). Оставшиеся суммы $5q_k$ кратны 5, для

их выдачи пойдут все 5-тыс. купюры и оставшиеся 1-тысячные (которые можно группировать по пять).

Любое распределение реализуется также при $n = 26$. Можно поступить так. Сначала суммы распределяются между первыми 25 сотрудниками, как описано выше – выдаются суммы $S_1, S_2, \ldots, S_{25}$. После этого от общей суммы $S_1 + S_2 + \ldots + S_{25} + S_{26}$ остается S_{26} тыс. руб. (неважно в каких купюрах) – доля 26-го сотрудника. Она ему и выдается.

Если $n > 26$, то бухгалтер не сможет выполнить свою задачу: ему можно предложить невыполнимое распределение премий. Пусть он 26 сотрудникам выдаст по 4 тыс. руб., а остальным – как хочет. Потребуется 104 тысячных купюр, а их всего 100.

Итак, бухгалтер выполнит задачу при наибольшем количестве сотрудников 26.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) 26.

5.6.12

На доске написали несколько необязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Решение.

Пусть написаны n чисел с цифрами a_k, b_k $(1 \le a_k, b_k \le 9)$:

$$10a_1 + b_1, \ldots, 10a_k + b_k, \ldots, 10a_n + b_n.$$

Обозначим $A = a_1 + \ldots + a_k + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_k + \cdots + b_n$.

а) По условию $\begin{cases} 10A + B = 363, \\ 10B + A = 4 \cdot 363 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 22, \\ B = 143 \end{cases}$. Будем подбирать исходные числа к этой системе. Замечаем, что сумма вторых цифр B почти в 7 раз превосходит сумму первых цифр A. Чтобы этим воспользоваться, возьмем первой цифрой всех чисел исходного набора одну и ту же цифру 1, а второй цифрой для максимально возможного количества чисел – одну и ту же цифру 7. Такое максимально возможное количество чисел – 20, что видно из равенства $143 = 7 \cdot 20 + 3$. Значит, возьмем 20 чисел 17. В сумме они дают 340. До всей суммы 363 не хватает 23, поэтому добавим два числа с первой цифрой 1 с такой суммой: это 11 и 12 (10 и 13 не подходят из-за цифры 0). Итак, мы составили исходный набор чисел:

двадцать чисел 17, числа 11 и 12.

После перестановки цифр получится набор:

двадцать чисел 71, числа 11 и 21.

Их сумма равна $1452 = 4 \cdot 363$.

б) По условию $\begin{cases} 10A + B = 363, \\ 10B + A = 2 \cdot 363 \end{cases}$. Вычитая из второго равенства первое, получим

$9(B - A) = 363 \Rightarrow B - A = \frac{121}{3}$ – не целое число, условие п. б) невозможно.

в) Ищем наибольшее возможное значение суммы

$$S = 10B + A = 10(363 - 10A) + A = 3630 - 99A.$$

Оно получается при наименьшем значении A. Найдем это наименьшее значение. Так как a_k, b_k – отличные от 0 цифры, то $\begin{cases} b_k \le 9 \\ 1 \le a_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_k \le 9 \\ 9 \le 9a_k \end{cases} \Rightarrow b_k \le 9a_k$. Поэтому $B \le 9A$, и из условия $10A + B = 363$ следует, что $10A + B = 363 \le 10A + 9A \Rightarrow A \ge \frac{363}{19}$, то есть $A \ge 19\frac{2}{19}$. Поскольку $A \in N$, то $A \ge 20$. Наименьшее значение A оказалось равным 20. Значит наибольшее возможное значение $S = 3630 - 99 \cdot 20 = 1650$. Покажем, что такое значение достигается. Подберем подходящие исходные числа. Учтем, что наибольшее увеличение суммы при

перестановке цифр дает число 19. Поэтому возьмем максимальное количество чисел 19. Такое максимальное количество – 19, что видно из равенства $363 = 19 \cdot 19 + 2$. Но добавка до суммы 363 – число 2 однозначное, поэтому придется взять 18 чисел 19. В сумме они дают 342, поэтому добавим еще число 21 (два числа 10 и 11 не можем взять из-за цифры 0). Итак, мы составили исходный набор чисел:

восемнадцать чисел 19 и число 21.

После перестановки цифр получится набор

восемнадцать чисел 91 и число12.

Их сумма равна 1650.

Ответ: а) 20 чисел 17, 11 и 12. б) Нет. в) 1650.

5.6.13

На доске было написано 30 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньше первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стерли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Решение.

Заметим, что стирают те числа, которые исходно были единицами. Пусть изначально на доске были написаны n единиц и $30 - n$ других чисел. Отметим, что $n = 30$ не может быть (среднее арифметическое написанных чисел было бы 1 вместо 7), значит $n < 30$.

а) Сумма всех написанных чисел была равна $30 \cdot 7 = 210$. Сумма $30 - n$ нестираемых чисел была равна $210 - n$. После

проведенной операции на доске осталось $30-n$ чисел, уменьшенных в 2 раза. Значит, сумма оставшихся чисел равна $\frac{210-n}{2}$. По условию их среднее арифметическое $\frac{210-n}{2}/(30-n)>14$. Это неравенство верно при всех $n>24\frac{2}{27}$, а так как $n\in N$, то при всех $n\geq 25$. Примем $n=25$ и подберем 30 исходных чисел, 25 из которых единицы. В качестве остальных 5 (нестираемых) чисел с суммой $210-25=185$ возьмем число $185:5=37$.

Проверим, что исходный набор 25 единиц, пяти чисел 37 удовлетворяет условиям задачи. Среднее арифметическое этих чисел равно $\frac{210}{30}=7$. После операции среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{5\cdot\frac{37}{2}}{5}=18{,}5>14$. Ответ: могло.

б) По условию $12<\frac{210-n}{2}/(30-n)<13 \Leftrightarrow \begin{cases} n>\frac{510}{23} \\ n<\frac{114}{5} \end{cases}$, но в интервале $(\frac{510}{23},\frac{114}{5})$ нет натуральных чисел. Ответ: не могло.

в) Чтобы узнать, при каком n среднее арифметическое оставшихся на доске чисел $A=\frac{210-n}{2}/(30-n)$ имеет наибольшее значение, разобьем его на два слагаемых так, чтобы одно не содержало n, а другое содержало его только в знаменателе:

$$\frac{210-n}{2}/(30-n)=\frac{n-210}{2(n-30)}=\frac{n-30-180}{2(n-30)}=\frac{1}{2}-\frac{90}{n-30}.$$

Теперь видим, что A имеет наибольшее значение при наибольшем возможном n. Оценим величину n. По условию все исходные числа не превосходят 40. Значит, сумма $30-n$ нестираемых чисел не превосходит $(30-n)40$. Так как эта сумма равна $210-n$, то имеем неравенство $210-n\leq(30-n)40$. Отсюда следует, что $n\leq\frac{990}{39}=25\frac{15}{39}$. Так как $n\in N$, то $n\leq 25$., то есть наибольшее возможное значение n – это 25. Значит, если A имеет наибольшее значение, то при $n=25$: $A=\frac{210-25}{2}/(30-25)=18{,}5$. Как видно из п. а),

действительно имеется исходный набор чисел, для которого $A = 18{,}5$.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) 18,5.

5.6.14

На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Решение.

а) Например, если были написаны по 10 раз числа 11 и 1 и со всеми провели эти действия, то их среднее арифметическое было равно 6, а после описанной операции оно станет равно 10.

б) Если a – среднее арифметическое n чисел с суммой S, то $a = \frac{S}{n}$. В нашем случае $a = 27, n = 20$, поэтому сумма всех данных чисел равна $27 \cdot 20 = 540$. Будут стерты те единицы, которые будут уменьшены. Пусть x – количество тех единиц, которые будут стерты, а y – количество прочих уменьшаемых чисел. Тогда сумма всех чисел, кроме будущих нулей, равна $540 - x$, и этих чисел всего $20 - x$. После операции останется $20 - x$ чисел с общей суммой $540 - x - y$. Их среднее арифметическое должно равняться 34: $\frac{540-x-y}{20-x} = 34 \Leftrightarrow y = 33x - 140$. Поскольку $y \geq 0$, то отсюда следует, что $33x \geq 140 \Leftrightarrow x \geq 4\frac{8}{33}$, а так как $x \in Z$, то $x \geq 5$. Теперь для y получаем

неравенство $y \geq 33 \cdot 5 - 140 = 25$. Но это невозможно, так как данных чисел всего 20.

в) Как нашли в п. б), среднее арифметическое оставшихся на доске чисел равно $A = \frac{540-x-y}{20-x}$. Нас интересует наибольшее возможное значение этой величины. При каждом фиксированном x наибольшее значение получается при $y = 0$ и оно равно $\frac{540-x}{20-x}$. Выясним теперь, при каком значении x наибольшей будет уже эта величина. Для этого разобьем его на два слагаемых так, чтобы одно не содержало x, а другое содержало его только в знаменателе:

$$\frac{540-x}{20-x} = \frac{20-x+520}{20-x} = 1 + \frac{520}{20-x}.$$

Отсюда видно, что величина будет наибольшей при наибольшем возможном значении x. Определим это значение. Заметим, что сумма 540 изначально данных чисел не превосходит $x + 40(20 - x)$ (это наибольшее возможное значение, если все, кроме x единиц, взяли максимальные – по 40). Поэтому

$540 \leq x + 40(20 - x) \Leftrightarrow x \leq 6\frac{2}{3}$, а так как $x \in Z$, то $x \leq 6$. Значит, максимально возможное значение $x = 6$. При $x = 6$ получаем наибольшее возможное значение

$$A = \frac{540-6-0}{20-6} = 38\frac{1}{7}.$$

Подберем исходный набор чисел, который после операции даст такое среднее арифметическое. 6 единиц уже есть. Остальные 14 чисел надо подобрать максимальными. Все 14 взять по 40 не удастся: в сумме получится $6 + 14 \cdot 40 = 566 > 540$. Возьмем 13 чисел по 40. Пока получили сумму $6 + 13 \cdot 40 = 526$. Чтобы набрать 540, в набор добавим еще число 14. Подобрали набор: 6 единиц, 13 чисел по 40, 14. Среднее арифметическое равно $\frac{540}{20} = 7$. Если уменьшим все единицы и только их, то останется набор 13 чисел по 40, 14. Среднее арифметическое этого набора $\frac{13 \cdot 40 + 14}{14} = 38\frac{1}{7}$.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) $38\frac{1}{7}$.

5.6.15

Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого участника является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл учеников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл учеников, сдавших тест, понизился, и средний балл учеников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл учеников, сдавших тест, составил 100, а средний балл учеников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл учеников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших – 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Решение.

а), б) Могло. Пусть было 3 ученика, которые набрали 100, 80 и 2 балла. Средний балл учеников, сдавших тест, равен $\frac{100}{1} = 100$, средний балл учеников, не сдавших тест, равен $\frac{80+2}{2} = 41$. После добавления баллов у учеников оказалось 105, 85 и 7 баллов. Средние баллы стали равны соответственно $\frac{105+85}{2} = 95$ и $\frac{7}{1} = 7$.

в) Пусть всего было N участников теста, сдали тест a учеников, после добавления баллов сдали тест b учеников. До добавления баллов общая сумма баллов была равна

$$90N = 100a + 75(N - a) \qquad (1)$$

После добавления баллов средний балл станет равен 95

(Если исходные баллы $k_1, k_2, \ldots, k_n$, то $\frac{k_1+k_2+\ldots+k_n}{n} = 90$, $\frac{(k_1+5)+(k_2+5)+\ldots+(k_n+5)}{n} = 90 + \frac{5n}{n} = 95$), а общая сумма баллов

$$95N = 103b + 79(N - b) \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) соответственно следует, что $3N = 5a$ и $2N = 3b$. Отсюда видно, что N кратно 5 и кратно 3, значит, кратно 15. Наименьшее натуральное число, кратное 15 это 15. Следовательно, наименьшее возможное значение $N = 15$. Покажем, что при $N = 15$ описанная ситуация возможна.

Пусть в группе из 15 учеников окажутся только три различных результата тестирования: по 100 баллов у n сдавших тест учеников, а у не сдавших – x баллов у одного, который после добавления баллов окажется сдавшим тест, и по y баллов у остальных $14 - n$. Найдем n, x и $14 - n$. Значение y можем назвать сразу: после добавления баллов у не сдавших $14 - n$ учеников средний балл окажется равным 79, а раз баллы одинаковые, то у всех будет по 79 баллов. Значит, изначально они имели по $y = 79 - 5 = 74$ балла. Значения n и x найдем, используя средний балл не сдавших тест учеников до добавления баллов:

$$\frac{x + 74(14 - n)}{15 - n} = 75$$

и средний балл сдавших тест учеников после добавления баллов:

$$\frac{105n + (x + 5)}{n + 1} = 103.$$

Из этих двух равенств находим $n = 9, x = 80$.

Итак, в группе 9 учеников получили по 100 баллов, 1 ученик 80 баллов, 5 учеников по 74 балла. Средний балл был равен 90, средний бал учеников, сдавших тест, был равен 100, а средний балл учеников, не сдавших тест, был равен 75. После добавления средний балл учеников, сдавших тест, стал равен 103, средний балл учеников, не сдавших тест, стал равен 79. Таким образом, все условия выполнены.

Ответ: а) Да. б) Да. в) 15.

5.6.16

а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

Решение.

Пусть $\overline{abcd}$ – позиционная запись четырехзначного числа, a, b, c, d – его цифры ($a \geq 1$). В задаче рассматриваются равенства $abcd = k(a+b+c+d)$, где $k = 10, 175, 50$. Так как $k \neq 0$, то ни одна из цифр b, c, d не равна нулю, иначе произведение слева равнялось бы нулю, а справа – нет (ведь $k \neq 0,\ a \neq 0$).

а) По условию, $abcd = 10(a+b+c+d)$. Видим, что в произведении слева присутствуют по крайней мере по одной цифре 2 и 5. Возьмем $a = 2, b = 5$. Тогда

$$10cd = 10(7+c+d) \Leftrightarrow cd = 7+c+d.$$

Перебирая значения $c = 1, 2, \ldots$, находим, что $c = 2$ подходит: $2d = 9+d \Rightarrow d = 9$. Произведение цифр числа 2529 равно 180, а сумма цифр равна 18, то есть в 10 раз меньше.

б) По условию, $abcd = 175(a+b+c+d)$. Видим, что произведение слева кратно 25, поэтому в нем присутствуют по крайней мере две цифры 5. При перестановке цифр и в произведении, и в сумме результаты не меняются, поэтому можем считать, что первые две цифры равны 5. Тогда $25cd = 175(10+c+d) \Leftrightarrow cd = 7(10+c+d)$. Видим, что cd кратно 7, так что хотя бы одна из цифр c и d равна 7. Поскольку порядок цифр безразличен, будем считать, что $c = 7$. Тогда получим равенство $7d = 7(17+d) \Leftrightarrow d = 17+d$, что невозможно. Ответ отрицательный.

в) По условию, $abcd = 50(a+b+c+d)$. Видим, что

произведение слева кратно 25, поэтому в нем присутствуют по крайней мере две цифры 5. При перестановке цифр и в произведении, и в сумме результаты не меняются, поэтому можем считать, что первые две цифры равны 5. Тогда $25cd = 50(10 + c + d) \Leftrightarrow cd = 2(10 + c + d)$. Видим, что cd кратно 2, так что хотя бы одна из цифр c и d четная. Пусть это c. Переберем четные цифры $c = 2, 4, 6, 8$.

Если $c = 2$, то $2d = 2(12 + d) \Leftrightarrow d = 12 + d$, что невозможно.

Если $c = 4$, то $4d = 2(14 + d) \Leftrightarrow 2d = 14 + d \Leftrightarrow d = 14$, что невозможно.

Если $c = 6$, то $6d = 2(16 + d) \Leftrightarrow 3d = 16 + d \Leftrightarrow d = 8$, подходит.

Если $c = 8$, то $8d = 2(18 + d) \Leftrightarrow 4d = 18 + d \Leftrightarrow d = 6$, подходит.

Получили два четырехзначных числа 5568 и 5586, удовлетворяющие условию: произведение цифр равно 1200, сумма цифр равна 24, $1200 = 50 \cdot 24$. Все другие имеющиеся такие числа отличаются только расположением цифр. Все их можно получить переставляя цифры в числе 5568. Подсчитаем количество всех таких чисел.

Цифры 5 стоят рядом: $\begin{cases} \mathbf{55}68, \ \mathbf{55}86 \\ 6\mathbf{55}8, \ 8\mathbf{55}6 \\ 68\mathbf{55}, \ 86\mathbf{55} \end{cases}$

Цифры 5 стоят врозь: $\begin{cases} \mathbf{5}6\mathbf{5}8, \ \mathbf{5}8\mathbf{5}6 \\ \mathbf{5}68\mathbf{5}, \ \mathbf{5}86\mathbf{5} \\ 6\mathbf{5}8\mathbf{5}, \ 8\mathbf{5}6\mathbf{5} \end{cases}$

Всего 12 чисел.

Ответ: а) Например, 2529. б) Нет. в) Число 5568 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

5.6.17

Три числа назовём «хорошей» тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника. Три числа назовём

«отличной» тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 5 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной «хорошей» тройки?

б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три «отличных» тройки?

в) Даны 10 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество «отличных» троек могло оказаться среди них?

Решение.

а) Исходим из того, что в треугольнике длина любой стороны меньше суммы длин двух других сторон. Так как нас интересует отрицательный результат, то попробуем выбрать 5 различных чисел $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ так, чтобы каждое число, начиная с третьего, было больше или равно сумме двух предыдущих:

$$a_3 \geq a_1 + a_2,\ a_4 \geq a_2 + a_3,\quad a_5 \geq a_3 + a_4\,. \qquad (1)$$

Тогда в любой тройке третьим числом окажется одно из чисел a_3, a_4, a_5, и из-за этого третье число не будет меньше суммы первых двух чисел – треугольник не получится. Для троек $(a_1, a_2, a_3), (a_2, a_3, a_4), (a_3, a_4, a_5)$ это видно из неравенств (1). Любая из остальных возможных троек тоже «плохая». Например, для тройки $(a_1,\ a_3,\ a_4)$ будем иметь

$$a_4 \geq a_2 + a_3 > a_1 + a_3 \Rightarrow a_4 > a_1 + a_3.$$

Выберем такие небольшие числа, чтобы в строке (1) выполнялись равенства: 1, 2, 3, 5, 8. По доказанному, среди них нет «хорошей тройки».

б) Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Поскольку длина гипотенузы больше длин обоих катетов, то длиной гипотенузы могут быть только числа a_3 и a_4. Следовательно, возможны только 4 равенства

$$a_1^2 + a_2^2 = a_3^2,\ a_1^2 + a_2^2 = a_4^2,\ a_1^2 + a_3^2 = a_4^2\,,\ a_2^2 + a_3^2 = a_4^2.$$

Чтобы были три «отличных» тройки, должны быть одновременно выполнены по крайней мере три из этих равенств. Какие бы три равенства ни взять, число a_4 участвует по крайней мере в двух из них. Значит, одновременно будут выполнены по крайней мере два из последних трех равенств: $a_1^2 + a_2^2 = a_4^2$ и $a_1^2 + a_3^2 = a_4^2$ или $a_1^2 + a_2^2 = a_4^2$ и $a_2^2 + a_3^2 = a_4^2$ или $a_1^2 + a_3^2 = a_4^2$ и $a_2^2 + a_3^2 = a_4^2$.
Из них следует соответственно $a_2 = a_3$ или $a_1 = a_3$ или $a_1 = a_2$, тогда как по условию все числа различны. Три «отличных» тройки не могут быть.

в) Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{10}$. Длиной гипотенузы могут быть числа $a_3, a_4, \ldots, a_{10}$. Подсчитаем количество различных возможных «отличных» троек с участием каждого из них.

Начнем с a_{10}. Для правильного подсчета учтем следующее. Чтобы получались *различные* возможные «отличные» тройки с участием a_{10}, надо сочетать a_{10} с парами чисел (a_i, a_j), образуя тройки (a_i, a_j, a_{10}), следя за тем, чтобы ни одно из выбранных чисел a_i, a_j не попадало в другую тройку с a_{10}. В противном случае, если, например, будем считать, что две различные тройки (a_i, a_j, a_{10}) и (a_i, a_k, a_{10}), имеющее общее число a_i, могут быть обе «отличными», то ошибемся. Ведь это будет означать, что прямоугольные треугодьники с равными гипотенузами a_{10} и равными катетами a_i не равны. Если не учтем это обстоятельство, то окажется, что вместо одной возможной «отличной» тройки посчитаем две. Таким образом, если уже выбрана тройка (a_i, a_j, a_{10}), то числа a_i и a_j в дальнейшем подсчете не участвуют.

Итак, для возможной гипотенузы a_{10} выберем из оставшегося списка из 9 чисел два в качестве возможных катетов (эти два числа дальше не участвуют в подсчете). Получим 1-й возможный прямоугольный треугольник. Из оставшихся 7 чисел выберем два – получим 2-й возможный прямоугольный треугольник. Далее из 5 два – 3-й возможный

треугольник. Из 3 два – 4-й возможный треугольник. Осталось одно число, треугольник невозможен. Подсчитали, что с гипотенузой a_{10} возможны не более 4 прямоугольных треугольников, то есть с участием a_{10} возможно не более 4 «отличных» троек. Число a_{10} дальше в подсчете не участвует: оно не может быть длиной катета с меньшими гипотенузами $a_9, a_8, \ldots, a_3$.

Аналогично для возможной гипотенузы a_9 выберем из оставшегося списка из 8 чисел два в качестве возможных катетов. Получим 1-й возможный прямоугольный треугольник. Далее из 6 два – 2-й возможный треугольник. Из 4 два – 3-й возможный треугольник. Из двух оставшихся получим 4-й возможный треугольник. Значит, с участием a_9 возможно тоже не более 4 «отличных» троек.

Продолжая подсчет таким же способом, получим, что каждое из чисел a_8 и a_7 дает не более 3 возможных «отличных» троек, каждое из чисел a_6 и a_5 – не более 2, a_4 и a_3 – не более 1.

Суммируя, получаем, что «отличных» троек может быть не более чем $4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 20$.

Рассмотрим пример, где это наибольшее количество реализуется. Теорема Пифагора подсказывает, что надо попробовать числа $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{10}$. «Отличные» тройки:

$$(\sqrt{1}, \sqrt{9}, \sqrt{10}),\ (\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{10}),\ (\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{10}),\ (\sqrt{4}, \sqrt{6}, \sqrt{10}),$$
$$(\sqrt{1}, \sqrt{8}, \sqrt{9}),\ (\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{9}),\ (\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}),\ (\sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{9}),$$
$$(\sqrt{1}, \sqrt{7}, \sqrt{8}),\ (\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{8}),\ (\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}),$$
$$(\sqrt{1}, \sqrt{6}, \sqrt{7}),\ (\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}),\ (\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{7}),$$
$$(\sqrt{1}, \sqrt{5}, \sqrt{6}),\ (\sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{6}),$$
$$(\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{5}),\ (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}),$$
$$(\sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{4}),$$
$$(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

Ответ: а) Да. б) Нет. в) 20.

Примечание. В пунктах а) и б) речь может идти о любых различных положительных действительных числах.

5.6.18

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из трех значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

Решение.

а) Возьмем число 6 в середине ряда и из нее образуем первую группу {6}. Данный ряд (без числа 16) представляет собой арифметическую прогрессию (с разностью 1) и потому число 6 равно среднему арифметическому двух соседних чисел 5 и 7. Из них образуем вторую группу {5, 7}. Среднее арифметическое обеих групп равно 6.

Третья группа {1, 2, 3, 4, 8, 9, 16} имеет среднее арифметическое $6\frac{1}{7}$. Ответ: могут.

б) Сумма всех 10 данных чисел равна 61. Пусть три группы содержат m, n, p слагаемых с суммами S_1, S_2, S_3 соответственно, и их средние арифметические равны x: Тогда

$S_1 = mx,\ S_2 = nx,\ S_3 = px \ \Rightarrow\ S_1 + S_2 + S_3 = (m+n+p)x \ \Rightarrow$ $61 = 10x \ \Rightarrow x = \frac{61}{10}$. Отсюда следует, например, что $S_1 = \frac{61}{10}m \Rightarrow$ $10S_1 = 61m$. Так как 61 не кратно 10, то m кратно 10, то есть $m = 0$ или 10. Это значит, что в первой группе нет чисел или все 10 чисел находятся в этой группе, что невозможно. Ответ: не могут.

в) Пусть группы с m, n, p числами с суммами S_1, S_2, S_3 имеют средние арифметические x, y, z соответственно. Общее среднее

арифметическое равно $\frac{61}{10} = 6{,}1$. Кроме того, в п. а) мы видели, что средние арифметические во всех группах не меньше 6. Оказывается, что при любом разбиении на группы хотя бы одно из средних арифметических строго больше 6. В самом деле, если бы было одновременно $x \le 6, y \le 6, z \le 6$, то было бы $mx \le 6m, ny \le 6n, pz \le 6p \Rightarrow mx + ny + p\,z \le 6(m + n + p) \Rightarrow 61 \le 6 \cdot 10$ – противоречие. Пусть через z было обозначено максимальное среднее арифметическое. Тогда, конечно, $z > 6$, то есть $z = \frac{S_3}{p} > 6$. Случаи $p = 10$ или $p = 9$ невозможны, так как две или одна из трех групп чисел будут пустыми.

Максимально возможное количество чисел в одной группе $p = 8$. В этом случае первая и вторая группы содержат по одному числу, которые совпадают со средними арифметическими в своих группах. Так как $z > 6 = \frac{48}{8}$ то $z \ge \frac{49}{8}$. Число $\frac{49}{8} = 6\frac{1}{8}$ не может быть максимальным средним арифметическим. В самом деле, когда $S_3 = 49$, сумма чисел в первых двух группах равна $61 - 49 = 12$.

Из данного списка чисел такую сумму дают только пары чисел 3, 9; 4, 8; 5, 7. При любом из этих распределений чисел по группам среднее арифметическое в одной из групп больше, чем $6\frac{1}{8}$ (например, $8 > 6\frac{1}{8}$). Следующая по величине дробь со знаменателем 8 – дробь $\frac{50}{8} = 6\frac{1}{4}$ может быть максимальным средним арифметическим. В самом деле, когда $S_3 = 50$, сумма чисел в первых двух группах равна $61 - 50 = 11$. Если в первые две группы поместим числа 5 и 6, то средние арифметические в обеих группах (5 и 6) будут меньше чем $6\frac{1}{4}$. Все другие возможные максимальные средние арифметические со знаменателем 8 будут больше, чем $\frac{50}{8}$. Следовательно, при $p = 8$ наименьшее возможное значение максимального среднего арифметического равно $6\frac{1}{4}$.

В случае $p = 7$ имеем $z > 6 = \frac{42}{7} \Rightarrow z \geq \frac{43}{7}$. Как показывает пример в п. а), уже наименьшая допустимая дробь $\frac{43}{7}$ со знаменателем 7 может быть максимальным средним арифметическим. Следовательно, наименьшее возможное значение максимального среднего арифметического равно $6\frac{1}{7}$. Оно меньше ранее найденного значения $6\frac{1}{4}$.

В случаях $p < 7$ имеем $z = \frac{S_3}{p} > 6 \Rightarrow z > \frac{6p}{p} \Rightarrow z \geq \frac{6p+1}{p} = 6 + \frac{1}{p} > 6 + \frac{1}{7}$. Уже наименьшая допустимая дробь $\frac{6p+1}{p}$ со знаменателем p оказывается больше, чем $6\frac{1}{7}$. Значит, если имеются максимальные средние арифметические, то все они больше, чем $6\frac{1}{7}$.

Итак, наименьшее значение максимального среднего арифметического равно $6\frac{1}{7}$.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) $6\frac{1}{7}$.

2.2. 19-я задача из сборника И.В.Ященко ЕГЭ 2020

Вариант 1

Пираты нашли сундук с сокровищами, в котором было 40 монет достоинством 1 дукат и 40 монет достоинством 5 дукатов.

а) Получится ли поделить все монеты поровну между 16 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

б) Получится ли поделить все монеты поровну между 30 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

в) При каком наибольшем количестве пиратов капитану всегда удастся поделить монеты между ними, каким бы способом ему ни захотелось это сделать (возможно, кому-то из пиратов будет полагаться 0 монет)?

Решение.

а) Всего в сундуке $40 + 40 \cdot 5 = 240$ дукатов. Каждый пират должен получить 240:16 =15 дукатов. Выдадим 13 пиратам по 3 пятидукатные монеты, 1 пирату 1 пятидукатную монету и 10 однодукатных монет, оставшимся 2 пиратам – по 15 однодукатных монет.

б) Каждый пират должен получить 240:30 = 8 дукатов, поэтому нужно будет выдать каждому не менее трех однодукатных монет, значит всего однодукатных монет нужно не менее 90 штук, а в сундуке их только 40. Следовательно, без сдачи и размена поделить все монеты поровну не получится.

в) Для удобства перенумеруем пиратов, и пусть $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_n$ – произвольное распределение монет между n пиратами: $S_k\ (1 \le k \le n)$ – число дукатов для пирата с номером k.

Выделим в сумме S_k максимальное слагаемое, кратное 5 (в связи с наличием монет по 5 дукатов). Согласно теореме о делении с остатком

> (Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых числа q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$)

число S_k единственным образом представляется в виде

$$S_k = 5q_k + r_k, \text{ где } q_k \geq 0,\ 0 \leq r_k \leq 4.$$

Остаток r_k можно выдать только монетами достоинством 1 дукат (от 0 до 4 монет). $5q_k$ дукатов можно выдать любыми монетами.

Возможность намеченного распределения монет зависит от количества однодукатных монет, необходимых для выдачи сумм остатков r_k. Это количество наибольшее, когда все остатки r_k равны 4. Если при этом все 40 однодукатных монет идут на выдачу сумм остатков r_k, то

$$40 = r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 4n \Rightarrow n = 10.$$

Если количество пиратов $n \leq 10$, то реализуется любое распределение. Можно поступить так.

Сначала раздаются суммы остатков r_k – для этого однодукатных монет хватит при любом раскладе (часть таких монет может остаться). Оставшиеся суммы $5q_k$ кратны 5, для их выдачи пойдут все пятидукатные монеты и оставшиеся однодукатные (которые можно группировать по пять).

Любое распределение реализуется также при $n = 11$. Можно поступить так. Сначала дукаты распределяются между первыми 10 пиратами, как описано выше – выдаются суммы $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$. После этого от общего количества дукатов $S_1 + S_2 + \ldots + S_{10} + S_{11}$ остается S_{11} дукатов (неважно в каких монетах) – доля 11-го пирата. Она ему и выдается.

Если $n > 11$, то капитан не сможет выполнить свою задачу: ему можно предложить невыполнимое распределение дукатов. Пусть он 11 пиратам выдаст по 4 дуката, а остальным – как

хочет. Потребуется 44 монеты достоинством 1 дукат, а в сундуке их всего 40.

Итак, капитан выполнит задачу при наибольшем количестве пиратов 11.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) 11.

Вариант 2

Пираты нашли сундук с сокровищами, в котором было 50 монет достоинством 1 дукат и 50 достоинством 3 дуката.

а) Получится ли поделить все монеты поровну между 20 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

б) Получится ли поделить все монеты поровну между 40 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

в) При каком наибольшем количестве пиратов капитану всегда удастся поделить монеты между ними, каким бы способом ему ни захотелось это сделать (возможно, кому-то из пиратов будет полагаться 0 монет)?

Решение.

а) Всего в сундуке $50 + 50 \cdot 3 = 200$ дукатов. Каждый пират должен получить $200:20 = 10$ дукатов. Выдадим 16 пиратам по 3 трехдукатных монеты и 1 однодукатной монете, 2 пиратам – по 1 трехдукатной монете и 7 однодукатных монет, оставшимся 2 пиратам – по 10 однодукатных монет.

б) Каждый пират должен получить $200 : 40 = 5$ дукатов, поэтому нужно будет выдать каждому не менее двух однодукатных монет, значит всего однодукатных монет нужно не менее 80 штук, а в сундуке их только 50. Следовательно, без сдачи и размена поделить все монеты поровну не получится.

в) Для удобства перенумеруем пиратов, и пусть $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_n$ – произвольное распределение монет между n пиратами: S_k $(1 \le k \le n)$ – число дукатов для пирата с номером k.

Выделим в сумме S_k максимальное слагаемое, кратное 3 (в связи с наличием монет по 3 дуката). Согласно теореме о делении с остатком

> (Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых числа q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$)

число S_k единственным образом представляется в виде

$$S_k = 3q_k + r_k, \text{ где } q_k \geq 0,\ 0 \leq r_k \leq 2.$$

Остаток r_k можно выдать только однодукатными монетами (от 0 до 2 монет). $3q_k$ дукатов можно выдать любыми монетами.

Возможность намеченного распределения монет зависит от количества однодукатных монет, необходимых для выдачи сумм остатков r_k. Это количество наибольшее, когда все остатки r_k равны 2. Если при этом все 50 однодукатных монет идут на выдачу сумм остатков r_k, то

$$50 = r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 2n \Rightarrow n = 25.$$

Если количество пиратов $n \leq 25$, то реализуется любое распределение. Можно поступить так.

Сначала раздаются суммы остатков r_k – для этого однодукатных монет хватит при любом раскладе (часть таких монет может остаться). Оставшиеся суммы $3q_k$ кратны 3, для их выдачи пойдут все трехдукатные монеты и оставшиеся однодукатные (которые можно группировать по 3).

Любое распределение реализуется также при $n = 26$. Можно поступить так. Сначала дукаты распределяются между первыми 25 пиратами, как описано выше – выдаются суммы $S_1, S_2, \ldots, S_{25}$. После этого от общего количества дукатов $S_1 + S_2 + \ldots + S_{25} + S_{26}$ остается S_{26} дукатов (неважно в каких монетах) – доля 26-го пирата. Она ему и выдается.

Если $n > 26$, то капитан не сможет выполнить свою задачу: ему можно предложить невыполнимое распределение дукатов. Пусть он 26 пиратам выдаст по 2 дуката, а остальным – как хочет. Потребуется 52 однодукатные монеты, а в сундуке их всего 60.

Итак, капитан выполнит задачу при наибольшем количестве пиратов 26.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) 26.

Вариант 3 (отличается от варианта 1 только числовыми данными)

Вариант 4

Пираты нашли сундук с сокровищами, в котором было 60 монет достоинством 1 дукат и 60 монет достоинством 3 дуката.

а) Получится ли поделить все монеты поровну между 40 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

б) Получится ли поделить все монеты поровну между 40 пиратами, если капитан хочет себе долю на 40 дукатов больше, чем у всех остальных (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

в) При каком наибольшем количестве пиратов капитану всегда удастся поделить монеты между ними, каким бы способом ему ни захотелось это сделать (возможно, кому-то из пиратов будет полагаться 0 монет)?

Решение.

а) Всего в сундуке $60 + 60 \cdot 3 = 240$ дукатов. Каждый пират должен получить $240:40 = 6$ дукатов. Выдадим 30 пиратам по 2 трехдукатные монеты, оставшимся 10 пиратам – по 6 однодукатных монет.

б) Пусть x дукатов – доля капитана. Тогда всем остальным (команде) достается $x - 40$ дукатов. Получаем уравнение $x + x - 40 = 240$. Отсюда находим $x = 140$, так что команде остается 100 дукатов, которые нельзя поделить поровну между 40 пиратами.

в) Для удобства перенумеруем пиратов, и пусть $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots, S_n$ – произвольное распределение монет между n

пиратами: $S_k\,(1 \le k \le n)$ – число дукатов для пирата с номером k.

Выделим в сумме S_k максимальное слагаемое, кратное 3 (в связи с наличием монет по 3 дуката). Согласно теореме о делении с остатком

> (Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых числа q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r,\ 0 \le r < |b|$)

число S_k единственным образом представляется в виде

$$S_k = 3q_k + r_k, \text{ где } q_k \ge 0,\ 0 \le r_k \le 2.$$

Остаток r_k можно выдать только однодукатными монетами (от 0 до 2 монет). $3q_k$ дукатов можно выдать любыми монетами.

Возможность намеченного распределения монет зависит от количества однодукатных монет, необходимых для выдачи сумм остатков r_k. Это количество наибольшее, когда все остатки r_k равны 2. Если при этом все 60 однодукатных монет идут на выдачу сумм остатков r_k, то

$$60 = r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 2n \Rightarrow n = 30.$$

Если количество пиратов $n \le 30$, то реализуется любое распределение. Можно поступить так.

Сначала раздаются суммы остатков r_k – для этого однодукатных монет хватит при любом раскладе (часть таких монет может остаться). Оставшиеся суммы $3q_k$ кратны 3, для их выдачи пойдут все трехдукатные монеты и оставшиеся однодукатные (которые можно группировать по три).

Любое распределение реализуется также при $n = 31$. Можно поступить так. Сначала дукаты распределяются между первыми 30 пиратами, как описано выше – выдаются суммы $S_1, S_2, \ldots, S_{30}$. После этого от общего количества дукатов $S_1 + S_2 + \ldots + S_{30} + S_{31}$ остается S_{31} дукатов (неважно в каких монетах) – доля 31-го пирата. Она ему и выдается.

Если $n > 31$, то капитан не сможет выполнить свою задачу: ему можно предложить невыполнимое распределение дукатов. Пусть он 31 пирату выдаст по 2 дуката, а остальным – как хочет.

Потребуется 62 монеты достоинством 1 дукат, а в сундуке их всего 60.

Итак, капитан выполнит задачу при наибольшем количестве пиратов 31.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) 31.

Вариант 5

Пираты нашли сундук с сокровищами, в котором было 30 монет достоинством 1 дукат и 30 монет достоинством 5 дукатов.

а) Получится ли поделить все монеты поровну между 36 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

б) Получится ли поделить все монеты поровну между 20 пиратами (каждому должно достаться целое число монет, сдачи и размена ни у кого из пиратов нет)?

в) При каком наибольшем количестве пиратов капитану всегда удастся поделить монеты между ними, каким бы способом ему ни захотелось это сделать (возможно, кому-то из пиратов будет полагаться 0 монет)?

Решение.

а) Всего в сундуке $30 + 30 \cdot 5 = 180$ дукатов. Каждый пират должен получить $180:36 = 5$ дукатов. Выдадим 30 пиратам по 1 пятидукатной монете, оставшимся 6 пиратам – по 5 однодукатных монет.

б) Каждый пират должен получить $180:20 = 9$ дукатов, поэтому нужно будет выдать каждому не менее четырех однодукатных монет, значит всего однодукатных монет нужно не менее 80 штук, а в сундуке их только 30. Следовательно, без сдачи и размена поделить все монеты поровну не получится.

в) Для удобства перенумеруем пиратов, и пусть $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots, S_n$ – произвольное распределение монет между n пиратами: S_k $(1 \le k \le n)$ – число дукатов для пирата с номером k.

Выделим в сумме S_k максимальное слагаемое, кратное 5 (в связи с наличием монет по 5 дукатов). Согласно теореме о делении с остатком

> (Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых числа q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r,\ 0 \leq r < |b|$)

число S_k единственным образом представляется в виде

$$S_k = 5q_k + r_k, \text{ где } q_k \geq 0,\ 0 \leq r_k \leq 4.$$

Остаток r_k можно выдать только монетами достоинством 1 дукат (от 0 до 4 монет). $5q_k$ дукатов можно выдать любыми монетами.

Возможность намеченного распределения монет зависит от количества однодукатных монет, необходимых для выдачи сумм остатков r_k. Это количество наибольшее, когда все остатки r_k равны 4. При этом на выдачу сумм остатков можно потратить не больше чем 28 дукатов из 30 (28 кратно 4, а 30 – нет), так что возможно равенство

$$28 = r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 4n \Rightarrow n = 7.$$

Если количество пиратов $n \leq 7$, то реализуется любое распределение. Можно поступить так.

Сначала раздаются суммы остатков r_k – для этого однодукатных монет хватит при любом раскладе (часть таких монет может остаться). Оставшиеся суммы $5q_k$ кратны 5, для их выдачи пойдут все пятидукатные монеты и оставшиеся однодукатные (которые можно группировать по пять).

Любое распределение реализуется также при $n = 8$. Можно поступить так. Сначала дукаты распределяются между первыми 7 пиратами, как описано выше – выдаются суммы $S_1, S_2, \ldots, S_7$. После этого от общего количества дукатов $S_1 + S_2 + \ldots + S_7 + S_8$ остается S_8 дукатов (неважно в каких монетах) – доля 8-го пирата. Она ему и выдается.

Если $n > 8$, то капитан не сможет выполнить свою задачу: ему можно предложить невыполнимое распределение дукатов. Пусть он 8 пиратам выдаст по 4 дуката, а остальным – как

хочет. Потребуется 32 монеты достоинством 1 дукат, а в сундуке их всего 30.

Итак, капитан выполнит задачу при наибольшем количестве пиратов 8.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) 8.

Вариант 6

Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ натуральных чисел, причем при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство

$$5a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k.$$

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство

$$4a_n = 5a_2 - a_1?$$

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 286$?

Решение.

Попробуем получить формулу для n -го члена последовательности. Имеем

$$a_{k+2} = \frac{6a_{k+1} - a_k}{5} = \frac{5a_{k+1} + a_{k+1} - a_k}{5} = a_{k+1} + \frac{1}{5}(a_{k+1} - a_k) \Rightarrow$$
$$a_{k+2} - a_{k+1} = \frac{1}{5}(a_{k+1} - a_k).$$

Пусть $a_{k+1} - a_k = b_k$ (по условию $b_k > 0$). Тогда $b_{k+1} = \frac{1}{5} b_k$, то есть получилась геометрическая прогрессия из натуральных чисел (b_k) с первым членом $b_1 = a_2 - a_1$ и знаменателем $q = \frac{1}{5}$. Свяжем a_n с этой прогрессией, для чего представим его в виде $a_n = (a_1) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$ (если откроем скобки, то каждое положительное число, начиная с первого, уничтожится с отрицательным числом в следующей скобке, останется только последнее положительное число a_n. Отрицательных чисел не останется, так как каждое отрицательное число, начиная с последнего, уничтожится с

положительным числом в предыдущей скобке). Подставляя $a_{k+1} - a_k = b_k (1 \le k \le n-1)$, получим

$$a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1}.$$

По формуле суммы членов геометрической прогрессии

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} = b_1 \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4} b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right),$$

поэтому

$$a_n = a_1 + \frac{5}{4} b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right) \qquad (1)$$

где $b_1 = a_2 - a_1$.

а) По формуле (1)

$$a_3 = a_1 + \frac{5}{4} b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{2}\right) = a_1 + \frac{6}{5} b_1,$$

$$a_4 = a_1 + \frac{5}{4} b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{3}\right) = a_1 + \frac{31}{25} b_1,$$

$$a_5 = a_1 + \frac{5}{4} b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{4}\right) = a_1 + \frac{156}{125} b_1.$$

Можно взять любое натуральное $a_1 \ge 1$ и любое натуральное b_1, кратное 125. Например, $a_1 = 1$, $b_1 = 125$. Тогда $a_2 = a_1 + b_1 = 126$, $a_3 = a_1 + \frac{6}{5} b_1 = 151, a_4 = a_1 + \frac{31}{25} b_1 = 156, a_5 = a_1 + \frac{156}{125} b_1 = 157$.

Получается последовательность 1, 126, 151, 156, 157.

б) Допустим, что $4a_n = 5a_2 - a_1$. Тогда в силу формулы (1) будем иметь равенство

$4a_1 + 5b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right) = 5a_2 - a_1$. Подставим $a_2 = a_1 + b_1$. Тогда

$$5b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right) = 5b_1.$$

Так как $5b_1 \ne 0$, то $1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$. Но это невозможно.

Ответ: не может.

в) По формуле (1) $a_n = a_1 + \frac{5}{4} b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right) = a_1 + \frac{b_1(5^{n-1}-1)}{4 \cdot 5^{n-2}}$.

Здесь $\frac{b_1(5^{n-1}-1)}{4 \cdot 5^{n-2}}$ – натуральное число, поэтому числитель дроби нацело делится и на 4, и на 5^{n-2}. Нас интересует делимость на

5^{n-2}. Множитель $5^{n-1}-1$ не делится на 5^{n-2}, иначе число $\frac{5^{n-1}-1}{5^{n-2}} = 5 - \frac{1}{5^{n-2}}$ было бы натуральным (а это не так: при $n \geq 3$ имеем неравенства $0 < \frac{1}{5^{n-2}} < 1$). Следовательно, b_1 нацело делится на 5^{n-2}:

$$b_1 = 5^{n-2}m \quad \text{при некотором } m \in N.$$

Выясним границу, которую наверняка не может превзойти n – число членов последовательности. Из последнего равенства видим, что $b_1 \geq 5^{n-2}$. С другой стороны,

$b_1 = a_2 - a_1 < a_2 < a_n = 286$. Поэтому $5^{n-2} < 286$. Учитывая, что ближайшей к числу 286 (сверху) степенью числа 5 является $5^4 = 625$, можем записать $5^{n-2} < 5^4$. Отсюда следует, что $n < 6$, а так как $n \in N$, то $n \leq 5$. Итак, n не может превзойти 5, и достаточно перебрать случаи $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$.

Пусть $n = 3$. Тогда

$$b_1 = 5m,\ a_3 = a_1 + \frac{5}{4}b_1\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) = a_1 + \frac{6}{5}b_1,$$

$$286 = a_1 + 6m \Leftrightarrow 286 - a_1 = 6m.$$

Здесь привлечем известную теорему о делении с остатком: Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых числа q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$.

Из этой теоремы следует утверждение:

Разность двух целых чисел a' и a'' делится на натуральное число b нацело тогда и только тогда, когда a' и a'' имеют одинаковые остатки при делении на b.

(Доказательство. Сначала вспомним, что если $a, b, c \in Z$, $a \vdots c$, $b \vdots c$, то $a + b \vdots c$. Отсюда следует, что если сумма $S = (a + b) \vdots c$ и одно из слагаемых $a \vdots c$, то и второе слагаемое $b \vdots c$. Это потому, что в сумме $b = S + (-a)$ оба слагаемых нацело делятся на c.

Пусть $a' = bq' + r', 0 \leq r' < b$, $a'' = bq'' + r'', 0 \leq r'' < b$. Если $a' - a''$ делится на b нацело, то $b(q' - q'') + (r' - r'')$ делится на b нацело, поэтому и $r' - r''$ делится на b нацело. Но

$$-b < r' - r'' < b,$$

а на промежутке $(-b, b)$ только одно число 0 делится на b нацело. Значит, $r' - r'' = 0 \Rightarrow r' = r''$. Обратно, если $r' = r''$, то $a' - a'' = b(q' - q'')$, то есть $a' - a''$ делится на b нацело).

В нашем случае разность $286 - a_1$ нацело делится на 6; при делении на 6 число 286 дает остаток 4. Значит, и число a_1 при делении на 6 дает остаток 4. Но наименьшим числом, дающим остаток 4, является само число 4 ($4 = 6 \cdot 0 + 4$, здесь частное 0, остаток 4. Меньшие числа дают меньшие остатки). Следовательно, наименьшим значением a_1 является 4.

Пусть $n = 4$. Тогда

$$b_1 = 25m,\ a_4 = a_1 + \frac{5}{4}b_1\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^3\right) = a_1 + \frac{31}{25}b_1,$$

$$286 = a_1 + 31m \Leftrightarrow 286 - a_1 = 31m.$$

При делении на 31 число 286 дает остаток 7, значит, число a_1 дает такой же остаток. Наименьшим числом, дающим остаток 7, является число 7. Следовательно, наименьшим значением a_1 является 7.

Пусть $n = 5$. Тогда

$$b_1 = 125m,\ a_5 = a_1 + \frac{5}{4}b_1\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^4\right) = a_1 + \frac{161}{125}b_1,$$

$$286 = a_1 + 161m \Leftrightarrow 286 - a_1 = 161m.$$

При делении на 161 число 286 дает остаток 125, значит, число a_1 дает такой же остаток. Наименьшим числом, дающим остаток 125, является число 125. Следовательно, наименьшим значением a_1 является 125.

Итак, a_1 принимает наименьшее значение 4 в случае $n = 3$. При $a_1 = 4$ имеем

$286 - 4 = 6m \Rightarrow m = 47,\ b_1 = 5 \cdot 47 = 235,\ a_2 = a_1 + b_1 = 239.$

Получаем последовательность 4, 239, 286, удовлетворяющую условию задачи.

Ответ: а) Например, 1, 126, 151, 156, 157. б) Нет. в) 4.

Вариант 7

Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ натуральных чисел, причем при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство

$$2a_{k+2} = 3a_{k+1} - a_k.$$

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 6$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство

$$a_n = 2a_2 - a_1?$$

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 286$?

Решение.

Попробуем получить формулу для $n-$го члена последовательности. Имеем

$$a_{k+2} = \frac{3a_{k+1} - a_k}{2} = \frac{2a_{k+1} + a_{k+1} - a_k}{2} = a_{k+1} + \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k) \Rightarrow$$
$$a_{k+2} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k).$$

Пусть $a_{k+1} - a_k = b_k$ (по условию $b_k > 0$). Тогда $b_{k+1} = \frac{1}{2}\, b_k$, то есть получилась геометрическая прогрессия из натуральных чисел (b_k) с первым членом $b_1 = a_2 - a_1$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Свяжем a_n с этой прогрессией, для чего представим его в виде $a_n = (a_1) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$ (если откроем скобки, то каждое положительное число, начиная с первого, уничтожится с отрицательным числом в следующей скобке, останется только последнее положительное число a_n. Отрицательных чисел не останется, так как каждое отрицательное число, начиная с последнего, уничтожится с положительным числом в предыдущей скобке). Подставляя $a_{k+1} - a_k = b_k (1 \leq k \leq n-1)$, получим

$$a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1}.$$

По формуле суммы членов геометрической прогрессии

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} = b_1 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right),$$

поэтому

$$a_n = a_1 + 2b_1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \qquad (1)$$

где $b_1 = a_2 - a_1$.

а) По формуле (1)

$$a_3 = a_1 + 2b_1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = a_1 + \frac{3}{2}b_1,$$

$$a_4 = a_1 + 2b_1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = a_1 + \frac{7}{4}b_1,$$

$$a_5 = a_1 + 2b_1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) = a_1 + \frac{15}{8}b_1,$$

$$a_6 = a_1 + 2b_1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = a_1 + \frac{31}{16}b_1.$$

Можно взять любое натуральное $a_1 \geq 1$ и любое натуральное b_1, кратное 16. Например,

$a_1 = 1$, $b_1 = 48$. Тогда

$a_2 = a_1 + b_1 = 49$, $a_3 = a_1 + \frac{3}{2}b_1 = 73$,

$a_4 = a_1 + \frac{7}{4}b_1 = 85$, $a_5 = a_1 + \frac{15}{8}b_1 = 91$, $a_6 = a_1 + + \frac{31}{16}b_1 = 94$.

Получится последовательность 1, 49, 73, 85, 91, 94.

б) Допустим, что $a_n = 2a_2 - a_1$. Тогда в силу формулы (1) будем иметь равенство

$a_1 + 2b_1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 2a_2 - a_1$. Подставим $a_2 = a_1 + b_1$. Тогда

$$2b_1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 2b_1.$$

Так как $2b_1 \neq 0$, то $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$. Но это невозможно.

в) По формуле (1) $a_n = a_1 + 2b_1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = a_1 + 2b_1 - \frac{b_1}{2^{n-2}}$. Здесь $\frac{b_1}{2^{n-2}}$ – натуральное число, поэтому b_1 нацело делится на 2^{n-2}:

$$b_1 = 2^{n-2}m \text{ при некотором } m \in N.$$

Выясним границу, которую наверняка не может превзойти n – число членов последовательности. Из последнего равенства

видим, что $b_1 \geq 2^{n-2}$. С другой стороны, $b_1 = a_2 - a_1 < a_2 < a_n = 286$. Поэтому $2^{n-2} < 286$. Учитывая, что ближайшей к числу 286 (сверху) степенью числа 2 является $2^9 = 512$ можем записать $2^{n-2} < 2^9$. Отсюда следует, что $n < 11$, а так как $n \in N$, то $n \leq 10$. Итак, n не может превзойти 10, и достаточно перебрать случаи $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

Пусть $n = 3$. Тогда

$$b_1 = 2m,\ a_3 = a_1 + 2b_1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = a_1 + \frac{3}{2}b_1,$$

$$286 = a_1 + 3m \Leftrightarrow 286 - a_1 = 3m.$$

Здесь привлечем известную теорему о делении с остатком: Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых числа q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r,\ 0 \leq r < |b|$.

Из этой теоремы следует утверждение:

Разность двух целых чисел a' и a'' делится на натуральное число b нацело тогда и только тогда, когда a' и a'' имеют одинаковые остатки при делении на b.

(Доказательство. Сначала вспомним, что если $a, b, c \in Z, a \vdots c,\ b \vdots c$, то $a + b \vdots c$. Отсюда следует, что если сумма $S = (a + b) \vdots c$ и одно из слагаемых $a \vdots c$, то и второе слагаемое $b \vdots c$. Это потому, что в сумме $b = S + (-a)$ оба слагаемых нацело делятся на c.

Пусть $a' = bq' + r', 0 \leq r' < b,\ \ a'' = bq'' + r'', 0 \leq r'' < b$. Если $a' - a''$ делится на b нацело, то $b(q' - q'') + (r' - r'')$ делится на b нацело, поэтому и $r' - r''$ делится на b нацело. Но

$$-b < r' - r'' < b,$$

а на промежутке $(-b, b)$ только одно число 0 делится на b нацело. Значит, $r' - r'' = 0 \Rightarrow r' = r''$. Обратно, если $r' = r''$, то $a' - a'' = b(q' - q'')$, то есть $a' - a''$ делится на b нацело).

В нашем случае разность $286 - a_1$ нацело делится на 3; при делении на 3 число 286 дает остаток 1. Значит, и число a_1 при делении на 3 дает остаток 1. Но наименьшим числом, дающим остаток 1, является само число 1 ($1 = 3 \cdot 0 + 1$, здесь частное 0, остаток 1). Следовательно, наименьшим значением a_1 является 1.

При $a_1 = 1$ имеем $286 - a_1 = 3m \Rightarrow m = 95$, $b_1 = 2m = 190$, $a_2 = a_1 + b_1 = 191$. Получаем последовательность 1, 191, 286, удовлетворяющую условию задачи.

Нам повезло – нет необходимости рассматривать другие значения n от 4 до 10, так как ответ получен: a_1 может принимать наименьшее значение 1 при $n = 3$.

Ответ: а) Например, 1, 49, 73, 85, 91, 94. б) Нет. в) 1.

Примечание. В сборнике ответ в) 2 неправильный.

Вариант 8

Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ натуральных чисел, причем при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство

$$4a_{k+2} = 5a_{k+1} - a_k.$$

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство

$$3a_n = 4a_2 - a_1?$$

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 283$?

Решение.

Попробуем получить формулу для $n-$го члена последовательности. Имеем

$$a_{k+2} = \frac{5a_{k+1} - a_k}{4} = \frac{4a_{k+1} + a_{k+1} - a_k}{4} = a_{k+1} + \frac{1}{4}(a_{k+1} - a_k) \Rightarrow$$
$$a_{k+2} - a_{k+1} = \frac{1}{4}(a_{k+1} - a_k).$$

Пусть $a_{k+1} - a_k = b_k$ (по условию $b_k > 0$). Тогда $b_{k+1} = \frac{1}{4} b_k$, то есть получилась геометрическая прогрессия из натуральных чисел (b_k) с первым членом $b_1 = a_2 - a_1$ и знаменателем $q = \frac{1}{4}$. Свяжем a_n с этой прогрессией, для чего представим его в виде $a_n = (a_1) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$ (если откроем скобки, то каждое положительное число, начиная с первого, уничтожится с отрицательным числом в следующей скобке, останется только последнее положительное

число a_n. Отрицательных чисел не останется, так как каждое отрицательное число, начиная с последнего, уничтожится с положительным числом в предыдущей скобке). Подставляя $a_{k+1} - a_k = b_k (1 \le k \le n-1)$, получим

$$a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1}.$$

По формуле суммы членов геометрической прогрессии

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} = b_1 \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right),$$

поэтому

$$a_n = a_1 + \frac{4}{3} b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) \qquad (1)$$

где $b_1 = a_2 - a_1$.

а) По формуле (1)

$$a_3 = a_1 + \frac{4}{3} b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{2}\right) = a_1 + \frac{5}{4} b_1,$$

$$a_4 = a_1 + \frac{4}{3} b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{3}\right) = a_1 + \frac{21}{16} b_1,$$

$$a_5 = a_1 + \frac{4}{3} b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{4}\right) = a_1 + \frac{85}{64} b_1.$$

Можно взять любое натуральное $a_1 \ge 1$ и любое натуральное b_1, кратное 64. Например, $a_1 = 1$, $b_1 = 256$. Тогда

$$a_2 = a_1 + b_1 = 257, \quad a_3 = a_1 + \frac{5}{4} b_1 = 321,$$

$$a_4 = a_1 + \frac{21}{16} b_1 = 337, a_5 = a_1 + \frac{85}{64} b_1 = 341.$$

Получится последовательность 1, 257, 321, 337, 341.

б) Допустим, что $3a_n = 4a_2 - a_1$. Тогда в силу формулы (1) будем иметь равенство

$3a_1 + 4b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) = 4a_2 - a_1$. Подставим $a_2 = a_1 + b_1$. Тогда

$$4b_1 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) = 4b_1.$$

Так как $4b_1 \ne 0$, то $1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$. Но это невозможно.

в) По формуле (1) $a_n = a_1 + \frac{4}{3}b_1\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) = a_1 + \frac{b_1(4^{n-1}-1)}{3\cdot 4^{n-2}}$. Здесь $\frac{b_1(4^{n-1}-1)}{3\cdot 4^{n-2}}$ – натуральное число, поэтому числитель дроби нацело делится и на 3, и на 4^{n-2}. Нас интересует делимость на 4^{n-2}. Множитель $4^{n-1}-1$ не делится на 4^{n-2}, иначе число $\frac{4^{n-1}-1}{4^{n-2}} = 4 - \frac{1}{4^{n-2}}$ было бы натуральным (а это не так: при $n \geq 3$ имеем неравенства $0 < \frac{1}{4^{n-2}} < 1$). Следовательно, b_1 нацело делится на 4^{n-2}:

$$b_1 = 4^{n-2}m \quad \text{при некотором } m \in N.$$

Выясним границу, которую наверняка не может превзойти n – число членов последовательности. Из последнего равенства видим, что $b_1 \geq 4^{n-2}$. С другой стороны, $b_1 = a_2 - a_1 < a_2 < a_n = 283$. Поэтому $4^{n-2} < 283$. Учитывая, что ближайшей к числу 283 (сверху) степенью числа 4 является $4^5 = 1024$ можем записать $4^{n-2} < 4^5$. Отсюда следует, что $n < 7$, а так как $n \in N$, то $n \leq 6$. Итак, n не может превзойти 6, и достаточно перебрать случаи $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ и $n = 6$.

Пусть $n = 3$. Тогда

$$b_1 = 4m,\ a_3 = a_1 + \frac{4}{3}b_1\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = a_1 + \frac{5}{4}b_1,$$

$$283 = a_1 + 5m \Leftrightarrow 283 - a_1 = 5m.$$

Здесь привлечем известную теорему о делении с остатком:
Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых числа q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$.

Из этой теоремы следует утверждение:

Разность двух целых чисел a' и a'' делится на натуральное число b нацело тогда и только тогда, когда a' и a'' имеют одинаковые остатки при делении на b.

(Доказательство. Сначала вспомним, что если $a, b, c \in Z$, $a \vdots c$, $b \vdots c$, то $a + b \vdots c$. Отсюда следует, что если сумма $S = (a + b) \vdots c$ и одно из слагаемых $a \vdots c$, то и второе слагаемое $b \vdots c$. Это потому, что в сумме $b = S + (-a)$ оба слагаемых нацело делятся на c.

Пусть $a' = bq' + r', 0 \le r' < b$, $a'' = bq'' + r'', 0 \le r'' < b$. Если $a' - a''$ делится на b нацело, то $b(q' - q'') + (r' - r'')$ делится на b нацело, поэтому и $r' - r''$ делится на b нацело. Но

$$-b < r' - r'' < b,$$

а на промежутке $(-b, b)$ только одно число 0 делится на b нацело. Значит, $r' - r'' = 0 \Rightarrow r' = r''$. Обратно, если $r' = r''$, то $a' - a'' = b(q' - q'')$, то есть $a' - a''$ делится на b нацело).

В нашем случае разность $283 - a_1$ нацело делится на 5; при делении на 5 число 283 дает остаток 3. Значит, и число a_1 при делении на 5 дает остаток 3. Но наименьшим числом, дающим остаток 3, является само число 3 ($3 = 5 \cdot 0 + 3$, здесь частное 0, остаток 3 . Меньшие числа дают меньшие остатки). Следовательно, наименьшим значением a_1 является число 3.

Пусть $n = 4$. Тогда

$$b_1 = 16m,\ a_4 = a_1 + \frac{4}{3}b_1\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3\right) = a_1 + \frac{21}{16}b_1,$$

$$283 = a_1 + 21m \Leftrightarrow 283 - a_1 = 21m.$$

При делении на 21 число 283 дает остаток 10, значит, число a_1 дает такой же остаток. Наименьшим числом, дающим остаток 10, является число 10. Следовательно, наименьшим значением a_1 является 10.

Пусть $n = 5$. Тогда

$$b_1 = 64m,\ a_5 = a_1 + \frac{4}{3}b_1\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4\right) = a_1 + \frac{85}{64}b_1,$$

$$283 = a_1 + 85m \Leftrightarrow 283 - a_1 = 85m.$$

При делении на 85 число 283 дает остаток 28, значит, число a_1 дает такой же остаток. Наименьшим числом, дающим остаток 28, является число 28. Следовательно, наименьшим значением a_1 является 28.

Пусть$n = 6$. Тогда

$$b_1 = 256m,\ a_6 = a_1 + \frac{4}{3}b_1\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5\right) = a_1 + \frac{341}{256}b_1,$$

$$283 = a_1 + 341m.$$

Этот случай невозможен, так как $a_1 + 341m \ge 1 + 341 = 342$.

Итак, a_1 принимает наименьшее значение 3 в случае $n = 3$. При $a_1 = 3$ имеем

$283 - 3 = 5m \Rightarrow m = 56,\ b_1 = 4 \cdot 56 = 224,\ a_2 = a_1 + b_1 = 227.$

Получаем последовательность 3, 227, 283, удовлетворяющую условию задачи.

Ответ: а) Например, 1, 257, 321, 337, 341. б) Нет. в) 3

Варианты 9, 10 (отличаются от варианта 6 только числовыми данными)

Вариант 11

Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ необязательно различных натуральных чисел, причем при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1.$$

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 5$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Решение.

Из данного равенства видно, что последовательность (a_k) полностью определяется выбором первых двух членов a_1 и a_2. Попробуем получить формулу для $k-$го члена последовательности. Имеем

$a_{k+2} = a_{k+1} + a_{k+1} - a_k + 1 \Rightarrow a_{k+2} - a_{k+1} = a_{k+1} - a_k + 1.$

Пусть $a_{k+1} - a_k = b_k$. Тогда $b_{k+1} = b_k + 1$, то есть получилась арифметическая прогрессия из натуральных чисел (b_k) с первым членом $b_1 = a_2 - a_1$ и разностью $d = 1$. Свяжем a_k с этой прогрессией, для чего представим его в виде

$a_k = (a_1) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{k-1} - a_{k-2}) + (a_k - a_{k-1})$

(если откроем скобки, то каждое положительное число, начиная с первого, уничтожится с отрицательным числом в

следующей скобке, останется только последнее положительное число a_n. Отрицательных чисел не останется, так как каждое отрицательное число, начиная с последнего, уничтожится с положительным числом в предыдущей скобке).

Подставляя $a_{k+1} - a_k = b_k (1 \le k \le n-1)$, получим

$$a_k = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{k-1}.$$

По формуле суммы членов арифметической прогрессии $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{k-1} =$

$\frac{b_1+b_{k-1}}{2}(k-1) = \frac{b_1+b_1+(k-2)\cdot 1}{2}(k-1) = b_1(k-1) + \frac{(k-1)(k-2)}{2}$,

поэтому $a_k = a_1 + b_1(k-1) + \frac{(k-1)(k-2)}{2}$, или

$$a_k = \frac{1}{2}k^2 + \left(b_1 - \frac{3}{2}\right)k + (a_1 - b_1 + 1) \qquad (1)$$

а) По формуле (1) имеем

$a_5 = 4b_1 + a_1 + 6 \Rightarrow 4(a_2 - a_1) + a_1 + 6 = 4a_2 - 3a_1 + 6 = 5 \Rightarrow$ $a_2 = \frac{3a_1-1}{4}$. Подберем натуральные a_1 и a_2. Пусть $3a_1 - 1 = 20$, то есть $a_1 = 7$. Тогда $a_2 = 5$, $a_3 = 2a_2 - a_1 + 1 = 4$, $a_4 = 2a_3 - a_2 + 1 = 4$, $a_5 = 5$.

Получили подходящую последовательность 7, 5, 4, 4, 5.

б) Равенство (1) означает, что члены последовательности (a_k) представляют собой значения квадратичной функции непрерывного аргумента

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \left(b_1 - \frac{3}{2}\right)x + (a_1 - b_1 + 1) \qquad (2)$$

при натуральных значениях аргумента: $a_k = y(k)$, так что все точки с натуральными координатами (k, a_k) лежат на параболе, направленной ветвями вверх. Квадратичная функция может иметь одинаковые значения $y(x_1) = y(x_2)$ не более чем при двух значениях аргумента $x_1 \ne x_2$. Значит, члены последовательности a_k и a_m

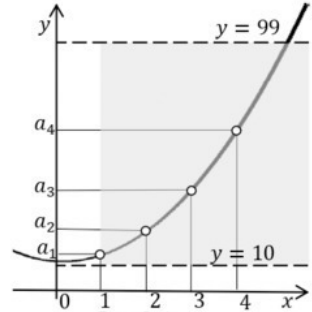


Рис.2.6

могут быть равными не более чем при двух номерах $k \neq m$. Поэтому могут встречаться только пары одинаковых членов последовательности с разными номерами. Никакое натуральное число a_k не может встретиться три раза.

в) Надо подобрать последовательность натуральных чисел (1), удовлетворяющих неравенствам $10 \leq a_k \leq 99$, с наибольшим количеством членов n. Для этого достаточно выбрать первые два члена a_1 и a_2, то есть параметры a_1 и b_1 в формуле (1). Геометрически это означает подобрать такую параболу (2), чтобы все ее точки с координатами (k, a_k) при $k = 1, 2, \ldots, n$ оказались в полуполосе $P: x \geq 1, 10 \leq y \leq 99$ и чтобы таких точек было наибольшее количество n (рис.2. 6).

Заметим, что функция (2) при всех целых значениях аргумента $x = k \in Z$ имеет целые значения. Действительно, по условию задачи a_1 , $a_2 \in N \Rightarrow b_1 = a_2 - a_1 \in Z$ и потому в выражении $y(k) = \frac{1}{2}k^2 + \left(b_1 - \frac{3}{2}\right)k + (a_1 - b_1 + 1)$ третье слагаемое $(a_1 - b_1 + 1) \in Z$. Сумму первых двух слагаемых представим в виде $k\left(\frac{k}{2} + b_1 - \frac{3}{2}\right) = \frac{k(k-3+2b_1)}{2}$. Если $k \in Z$ четное , то после его сокращения на 2 получается произведение целых чисел. Если k нечетное, то $k - 3$ четное и потому $k - 3 + 2b_1$ четное, так что после сокращения $k - 3 + 2b_1$ на 2 тоже получается произведение целых чисел. Следовательно, $y(k) \in Z$.

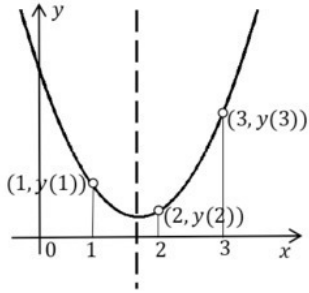


Рис.2.7

Множество точек $(k;\ y(k))$ с целыми координатами $k, y(k)$ назовем *дискретной* параболой (лат. discretus прерывистый, прерывный), а сами точки ($k;\ y(k)$) – ее *узлами*. Множество узлов $(k,\ a_k)$, представляющих последовательность (a_k), является частью дискретной параболы.

Как известно, осью симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$ служит прямая $x = -\frac{b}{2a}$. Это значит, что если точки x_1 и x_2 расположены симметрично относительно точки $-\frac{b}{2a}$ (равноотстоят от нее), то $y(x_1) = y(x_2)$. В общем случае узлы дискретной параболы могут располагаться не симметрично относительно оси параболы из-за того, что целые точки на оси Ox располагаются не симметрично относительно точки $-\frac{b}{2a}$ (рис.2.7). Но в нашем случае $a = \frac{1}{2}$, $b = b_1 - \frac{3}{2}$, $-\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} - b_1$ и осью симметрии является прямая $x = \frac{3}{2} - b_1$. Число $\frac{3}{2} - b_1$ находится посередине между соседними целыми числами $m = 1 - b_1$ и $m + 1 = 2 - b_1$ (рис.2.8). Поэтому целые числа могут располагаться симметрично относительно числа

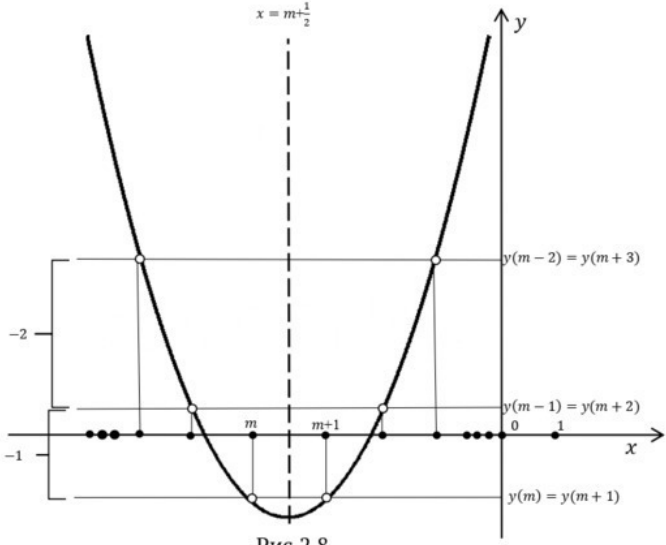


Рис.2.8

$\frac{3}{2} - b_1 = m + \frac{1}{2}$. Благодаря этому узлы нашей дискретной параболы располагается симметрично относительно оси $x = m + \frac{1}{2}$.

Число $y(m + \frac{1}{2})$ является минимальным значением функции (2). Значения функции в ближайших к $m + \frac{1}{2}$ целых точках – значения $y(m)$ и $y(m + 1)$, равные друг другу в силу симметрии, являются минимальным значением функции при целых значениях аргумента.

Важно указать на разность $y(k + 1) - y(k) = \frac{1}{2}(k + 1)^2 + \left(b_1 - \frac{3}{2}\right)(k + 1) + (a_1 - b_1 + 1) - \left(\frac{1}{2}k^2 + \left(b_1 - \frac{3}{2}\right)k + (a_1 - b_1 + 1)\right)$ $= b_1 + k - 1 = k - m.$

В частности (рис.2.8),

$$y(m + 1) - y(m) = m - m = 0,$$
$$y(m) - y(m - 1) = (m - 1) - m = -1,$$
$$y(m - 1) - y(m - 2) = (m - 2) - m = -2,$$

С удалением числа k от числа m величина $|m - k|$ возрастает, то есть расстояние между соседними значениями $y(k)$ и $y(k + 1)$ по вертикали увеличивается. Это означает, что плотность узловых точек (их количество на единицу длины по вертикали) максимальна вблизи прямой $y = y(m)$ и уменьшается при движении вверх.

Если $m + 1$ окажется натуральным числом, то число $y(m + 1)$ будет минимальным членом a_{m+1} последовательности (a_k) с номером $m + 1$ $(m + 1 \geq 1)$: $y(m + 1) = a_{m+1}$. А если окажется $m \in N$, то будет $y(m) = a_m$ и в последовательности окажутся два одинаковых минимальных члена $a_m = a_{m+1}$; соответствующие точки $(m; a_m)$ и $(m + 1; a_{m+1})$ симметричны относительно прямой $x = m + \frac{1}{2}$.

Когда в уравнении (2) меняются параметры a_1 и b_1, парабола параллельно переносится (сохраняя форму) в новое положение (в любом положении она может быть получена параллельным переносом параболы $y(x) = \frac{1}{2}x^2$).

Как известно, при параллельном переносе параболы $y = ax^2$ с переносом вершины $(0;0)$ в точку $(x_0; y_0)$ она приобретает уравнение $y - y_0 = a(x - x_0)^2$. Уравнение $y = ax^2 + bx + c$ можно привести к такому виду, выделив полный квадрат из членов с x:

$y = (ax^2 + bx) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right) + c =$

$a\left((x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = \quad a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 -$

$\frac{b^2-4ac}{4a} \Rightarrow y - \frac{4ac-b^2}{4a} = a(x - (-\frac{b}{2a}))^2$. Следовательно, парабола $y = ax^2 + bx + c$ получается параллельным переносом параболы $y = ax^2$ с переносом вершины $(0;0)$ в точку $(x_0; y_0) = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

В общем случае при параллельном переносе параболы $y = ax^2 + bx + c$ узловые точки могут перестать быть узловыми из-за изменения их координат. Но в нашем случае этого не произойдет. В самом деле, при любых значениях b_1 парабола должна иметь ось $x = \frac{3}{2} - b_1$ посередине между соседними вертикальными прямыми $x = 1 - b_1$ и $x = 2 - b_1$ с целыми значениями $1 - b_1$ и $2 - b_1$. Из-за этого параллельный перенос параболы влево или вправо возможен только на целое число единиц. Следовательно, абсциссы узловых точек могут измениться только на целое число единиц и потому остаются целыми. Ординаты тоже останутся целыми, ведь мы доказали, что функция (2) при целых значениях аргумента имеет целые значения.

Итак, при любом параллельном перемещении параболы ее узлы остаются на своих местах, меняя только координаты. Пользуясь этим, расположим параболу наиболее выгодным образом. Чтобы в полуполосе P было максимальное количество узлов, надо поместить в эту полуполосу кусок параболы с наибольшей плотностью узловых точек. В качестве такого куска возьмем кусок левой половины дискретной параболы с нижней точкой $(m; y(m)) = (m; 10)$. Так как $y(m+1) = y(m)$, то и симметричная правая часть параболы окажется в полуполосе P . Тогда $a_m = a_{m+1} = 10$ будут минимальными членами

последовательности, которая будет содержать $n = 2m$ членов. Учитывая условие $a_1 \le 99$, найдем максимально возможное значение m.

Согласно формуле (1) с учетом равенства $b_1 = 1 - m$ получаем

$$10 = \frac{1}{2}m^2 - \left(m + \frac{1}{2}\right)m + (a_1 + m) = -\frac{1}{2}m^2 + a_1 + \frac{1}{2}m \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m + 10.$$

Условие $a_1 \le 99$ дает неравенство $\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m - 89 \le 0$. Оно выполняется при $m \le \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 178})$. Учитывая, что $13{,}85 < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 178}) < 13{,}86$, получаем $m \le 13$, то есть может быть до 13 членов последовательности в убывающей части. Значит, максимально возможное число членов последовательности $n = 26$.

Нами уже фактически построена подходящая

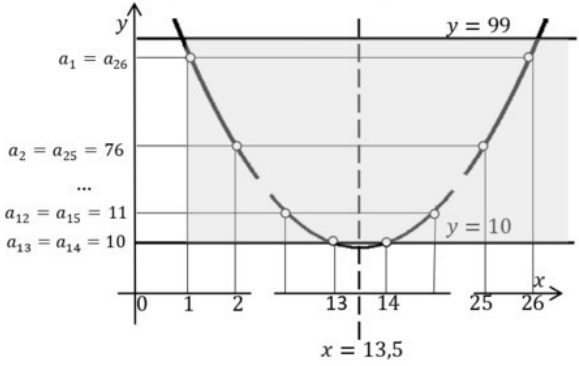


Рис.2.9

последовательность с $n = 26$ членами, так как параметры a_1 и b_1 формулы (1) можем теперь указать: $b_1 = 1 - m = 1 - 13 = -12$, $a_1 = \frac{1}{2} \cdot 13^2 - \frac{1}{2} \cdot 13 + 10 = 88$. Наша последовательность задается формулой

$$a_k = \frac{1}{2}k^2 + \left(-12 - \frac{3}{2}\right)k + (88 + 12 + 1) = \frac{1}{2}k^2 - 13{,}5k + 101.$$

Рис.2.9 иллюстрирует построенную последовательность.

Ответ: а) Например, 7, 5, 4, 4, 5. б) Нет. в) При $n = 26$.

Вариант 12

Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ необязательно различных натуральных чисел, причем при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1.$$

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 3$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_3 = a_{11}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 50?

Решение.

В варианте 11 получена формула для $k-$ го члена последовательности:

$$a_k = \tfrac{1}{2}k^2 + \left(b_1 - \tfrac{3}{2}\right)k + (a_1 - b_1 + 1), \qquad (1)$$

где $b_1 = a_2 - a_1$.

а) По формуле (1) имеем $a_5 = \frac{1}{2}\cdot 25 + \left(a_2 - a_1 - \frac{3}{2}\right)\cdot 5 + (2a_1 - a_2 + 1) = 4a_2 - 3a_1 + 6 \Rightarrow \ 4a_2 - 3a_1 + 6 = 3 \Rightarrow a_2 = \frac{3a_1 - 3}{4}$.

Подберем натуральные a_1 и a_2. Пусть $3a_1 - 3 = 12$, то есть $a_1 = 5$. Тогда $a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = 2, \ a_5 = 3$.

Получили подходящую последовательность 5, 3, 2, 2, 3.

б) По формуле (1) имеем $a_3 = \frac{1}{2}\cdot 9 + \left(a_2 - a_1 - \frac{3}{2}\right)\cdot 3 + (2a_1 - a_2 + 1) = 2a_2 - a_1 + 1$, $a_{11} = \frac{1}{2}\cdot 121 + \left(a_2 - a_1 - \frac{3}{2}\right)\cdot 11 + (2a_1 - a_2 + 1) = 10a_2 - 9a_1 + 45$.

Если $2a_2 - a_1 + 1 = 10a_2 - 9a_1 + 45$, то $8(a_1 - a_2) = 44 \Rightarrow 2(a_1 - a_2) = 11$, что невозможно, так как 11 нечетное число.

Ответ: нет.

в) Повторяется решение варианта 11 при неравенствах $1 \le a_k \le 50$ вместо
$10 \le a_k \le 99$.

Ответ: а) Например, 5, 3, 2, 2, 3. б) Нет. в) При $n = 20$.

Вариант 13

Конечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \ge 3$ необязательно различных натуральных чисел, причем при всех натуральных $k \le n - 2$ выполнено равенство

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1.$$

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 2$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_6 = a_{18}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 100?

Решение.

В варианте 11 получена формула для $k-$ го члена последовательности:

$$a_k = \frac{1}{2}k^2 + \left(b_1 - \frac{3}{2}\right)k + (a_1 - b_1 + 1), \qquad (1)$$

где $b_1 = a_2 - a_1$.

а) По формуле (1) имеем $a_5 = \frac{1}{2}\cdot 25 + \left(a_2 - a_1 - \frac{3}{2}\right)\cdot 5 + (2a_1 - a_2 + 1) = 4a_2 - 3a_1 + 6 \Rightarrow \ 4a_2 - 3a_1 + 6 = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{3a_1 - 4}{4}$.
Подберем натуральные a_1 и a_2. Пусть $3a_1 - 4 = 8$, то есть $a_1 = 4$.
Тогда $a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 1, \ a_5 = 2$.
Получили подходящую последовательность 4, 2, 1, 1, 2.

б) По формуле (1) имеем

$a_6 = \frac{1}{2}\cdot 36 + \left(a_2 - a_1 - \frac{3}{2}\right)\cdot 6 + (2a_1 - a_2 + 1) = 5a_2 - 4a_1 + 10,$
$a_{18} = \frac{1}{2}\cdot 324 + \left(a_2 - a_1 - \frac{3}{2}\right)\cdot 18 + (2a_1 - a_2 + 1) = 17a_2 - 16a_1 + 136.$
Если $5a_2 - 4a_1 + 10 = 17a_2 - 16a_1 + 136$, то $12(a_1 - a_2) = 126 \Rightarrow 2(a_1 - a_2) = 21$, что невозможно, так как 21 не кратно 2. Ответ:

нет.

в) Повторяется решение варианта 11 при неравенствах $1 \le a_k \le 100$ вместо $10 \le a_k \le 99$.

Ответ: а) Например, 4, 2, 1, 1, 2. б) Нет. в) При $n = 28$.

Примечание. В сборнике ответ а) неправильный: должно быть $a_5 = 2$.

Вариант 14

Конечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \ge 3$ необязательно различных натуральных чисел, причем при всех натуральных $k \le n - 2$ выполнено равенство

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1.$$

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 1$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_6 = a_{16}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 75?

Решение.

В варианте 11 получена формула для $k-$ го члена последовательности:

$$a_k = \frac{1}{2}k^2 + \left(b_1 - \frac{3}{2}\right)k + (a_1 - b_1 + 1), \qquad (1)$$

где $b_1 = a_2 - a_1$.

а) По формуле (1) имеем $a_5 = \frac{1}{2}\cdot 25 + \left(a_2 - a_1 - \frac{3}{2}\right)\cdot 5 + (2a_1 - a_2 + 1) = 4a_2 - 3a_1 + 6 \Rightarrow 4a_2 - 3a_1 + 6 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{3a_1 - 5}{4}$. Подберем натуральные a_1 и a_2. Пусть $3a_1 - 5 = 16$, то есть $a_1 = 7$. Тогда $a_2 = 4, a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = 1$.

Получили подходящую последовательность 7, 4, 2, 1, 1.

б) По формуле (1) имеем

$a_6 = \frac{1}{2}\cdot 36 + \left(a_2 - a_1 - \frac{3}{2}\right)\cdot 6 + (2a_1 - a_2 + 1) = 5a_2 - 4a_1 + 10,$

$a_{16} = \frac{1}{2}\cdot 256 + \left(a_2 - a_1 - \frac{3}{2}\right)\cdot 16 + (2a_1 - a_2 + 1) = 15a_2 - 14a_1 + 105.$

Если $5a_2 - 4a_1 + 10 = 15a_2 - 14a_1 + 105$, то $10(a_1 - a_2) = 95 \Rightarrow$

$2(a_1 - a_2) = 19$, что невозможно, так как 19 нечетное число. Ответ: нет.

в) Повторяется решение варианта 11 при неравенствах $1 \le a_k \le 75$ вместо
$10 \le a_k \le 99$.

Ответ: а) Например, 7, 4, 2, 1, 1. б) Нет. в) При $n = 24$.

Примечание. В сборнике ответ а) неправильный: он подходит для условия $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

Вариант 15

Конечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \ge 3$ необязательно различных натуральных чисел, причем при всех натуральных $k \le n - 2$ выполнено равенство

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1.$$

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 1$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_9 = a_{27}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 150?

Решение.

В варианте 11 получена формула для $k-$ го члена последовательности:

$$a_k = \frac{1}{2}k^2 + \left(b_1 - \frac{3}{2}\right)k + (a_1 - b_1 + 1), \qquad (1)$$

где $b_1 = a_2 - a_1$.

а) По формуле (1) имеем $a_5 = \frac{1}{2}\cdot 25 + \left(a_2 - a_1 - \frac{3}{2}\right)\cdot 5 + (2a_1 - a_2 + 1) = 4a_2 - 3a_1 + 6 \Rightarrow 4a_2 - 3a_1 + 6 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{3a_1 - 5}{4}$.
Подберем натуральные a_1 и a_2. Пусть $3a_1 - 5 = 16$, то есть $a_1 = 7$. Тогда $a_2 = 4, a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = 1$.
Получили подходящую последовательность 7, 4, 2, 1, 1.

б) По формуле (1) имеем

$$a_9 = \frac{1}{2}\cdot 81 + \left(a_2 - a_1 - \frac{3}{2}\right)\cdot 9 + (2a_1 - a_2 + 1) = 8a_2 - 7a_1 + 28,$$

$a_{27} = \frac{1}{2} \cdot 729 + \left(a_2 - a_1 - \frac{3}{2}\right) \cdot 27 + (2a_1 - a_2 + 1) = 26a_2 - 25a_1 + 325.$
Если $8a_2 - 7a_1 + 28 = 26a_2 - 25a_1 + 325$, то $18(a_1 - a_2) = 297 \Rightarrow 2(a_1 - a_2) = 33$, что невозможно, так как 33 нечетное число. Ответ: нет.

в) Повторяется решение варианта 11 при неравенствах $1 \leq a_k \leq 150$ вместо $10 \leq a_k \leq 99$.

Ответ: а) Например, 7, 4, 2, 1, 1. б) Нет. в) При $n = 34$.

Вариант 16

Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой равен 2014, а разность равна 13. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

а) Найдите тысячное число получившейся последовательности.

б) Найдите сумму первой тысячи чисел получившейся последовательности.

в) Чему может равняться наибольшая сумма 1010 чисел получившейся последовательности, идущих подряд?

Примечание. Ввиду того, что последовательность бесконечна, возникает вопрос: а можно ли после конечного числа шагов всю данную последовательность превратить в последовательность из однозначных чисел? Дело в том, что для разных чисел нужно разное число шагов для перехода к однозначной сумме чисел. Например,222 $\rightarrow$ 6 (1 шаг), 999 $\rightarrow$ 27 $\rightarrow$ 9 (2 шага), число из 999 998 девяток $\rightarrow$ 999982 $\rightarrow$ 46 $\rightarrow$ 10 $\rightarrow$ 1 (4 шага). В школьной программе подобный вопрос из теории чисел не может быть рассмотрен, поэтому корректно было бы сформулировать процедуру с прогрессией иначе: «Каждый член прогрессии заменяли суммой его цифр, затем получившееся число снова заменяли суммой его цифр, и так до тех пор, пока не получалось однозначное число».

Решение.

Обозначим a_n член данной прогрессии с номером n, d ее разность, b_n член полученной последовательности с номером n. Все члены данной прогрессии отличны от нуля, поэтому

суммы их цифр тоже отличны от нуля, и в итоге все члены полученной последовательности отличны от нуля. Значит, последовательность чисел b_n может состоять только из цифр

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

а) По формуле $n-$го члена арифметической прогрессии $(a_n = a_1 + (n-1)d)$ находим

$$a_{1000} = 2014 + 999 \cdot 13 = 15001 \Rightarrow b_{1000} = 7.$$

Для ответов на оставшиеся пункты нужно использовать какое-нибудь свойство суммы цифр числа. Пусть

$$c = c_1 + 10c_2 + 10^2c_3 + \cdots + 10^{k-1}c_k$$

– десятичное представление некоторого числа $c \in N$,

$$s = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k$$

– сумма его цифр. Рассмотрим их разность:

$$c - s = c_1 + 10c_2 + 10^2c_3 + \cdots + 10^{k-1}c_k - c_1 - c_2 - c_3 - \cdots - c_k =$$
$$9c_2 + 99c_3 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{k-1}c_k =$$
$$9\left(1c_2 + 11c_3 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{k-2}c_k\right) = 9m,$$

где $m \in N$.

Видим, что разность между любым натуральным числом и суммой его цифр нацело делится на 9. Это свойство суммы цифр числа и поможет нам закончить решение. Привлечем еще известную теорему о делении с остатком:

Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых числа q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r,\ 0 \leq r < |b|$.

Из этой теоремы следует утверждение:

Разность двух целых чисел a' и a'' делится на натуральное число b нацело тогда и только тогда, когда a' и a'' имеют одинаковые остатки при делении на b.

(Доказательство. Сначала вспомним, что если $a, b, c \in Z, a \vdots c,\ b \vdots c$, то $a + b \vdots c$. Отсюда следует, что если сумма $S = (a + b) \vdots c$ и одно из слагаемых $a \vdots c$, то и второе слагаемое $b \vdots c$. Это потому, что в сумме $b = S + (-a)$ оба слагаемых нацело делятся на c.

Пусть $a' = bq' + r', 0 \le r' < b$, $a'' = bq'' + r'', 0 \le r'' < b$. Если $a' - a''$ делится на b нацело, то $b(q' - q'') + (r' - r'')$ делится на b нацело, поэтому и $r' - r''$ делится на b нацело. Но

$$-b < r' - r'' < b,$$

а на промежутке $(-b, b)$ только одно число 0 делится на b нацело. Значит, $r' - r'' = 0 \Rightarrow r' = r''$. Обратно, если $r' = r''$, то $a' - a'' = b(q' - q'')$, то есть $a' - a''$ делится на b нацело).

В нашем случае $b = 9$, и имеем утверждение:

Любое натуральное число и сумма его цифр имеют одинаковые остатки при делении на 9 (эти остатки могут иметь значения от 0 до 8).

Следовательно, когда происходит переход от члена a_n прогрессии к сумме его членов, затем от нее к новой сумме членов и т.д., – исходное число a_n, все промежуточные суммы цифр и итоговая цифра b_n имеют одинаковый остаток при делении на 9.

Для удобства назовем цифру b_n *образом* числа a_n при преобразовании данной прогрессии в новую числовую последовательность, а число a_n – *прообразом* цифры b_n. Образом числа a_n является цифра, имеющая одинаковый с a_n остаток при делении на 9.

Различных значений b_n имеется всего 9, поэтому можно предположить, что через каждые 9 номеров эти значения будут повторяться. Проверим. Для любых $n, k \in N$

$$a_{n+9k} - a_n = a_1 + (n + 9k - 1)d - (a_1 + (n - 1)d) = 9kd.$$

Видим, что разность $a_{n+9k} - a_n$ нацело делится на 9. Значит, a_{n+9k} и a_n имеют при делении на 9 одинаковые остатки. Но тогда такие же одинаковые остатки имеют их образы b_{n+9k} и b_n и потому разность $b_{n+9k} - b_n$ нацело делится на 9. Но это – разность цифр от 1 до 9 и может делиться на 9 только если цифры b_{n+9k} и b_n совпадают (тогда $b_{n+9k} - b_n = 0$). Показано, что $b_{n+9k} = b_n$, то есть через каждые 9 номеров значения b_n повторяются. Найдем первые 9 значений (табл.2.10).

Теперь можем найти любое значение b_n при $n \ge 10$. Например, $b_{213} = b_{9 \cdot 23 + 6} = b_6 = 9$.

б) $1000 = 9 \cdot 111 + 1$, поэтому первая тысяча чисел последовательности (b_n) состоит из 111 повторов чисел 7, 2, 6, 1, 5, 9, 4, 8, 3 и еще числа $b_{1000} = b_1 = 7$. Сумма первой тысячи чисел последовательности равна $111(7 + 2 + 6 + 1 + 5 + 9 + 4 + 8 + 3) + 7 = 111 \cdot 45 + 7 = 5002$.

n	a_n	Преобразование	b_n
1	2014	→	7
2	2027	→ 11 →	2
3	2040	→	6
4	2053	→ 10 →	1
5	2066	→ 14 →	5
6	2079	→ 18 →	9
7	2092	→ 13 →	4
8	2105	→	8
9	2118	→ 12 →	3

Табл.2.10

в) Представим себе последовательность (b_n) в виде бесконечного столбца, и пусть первые 9 чисел b_n, сумма которых равна 45, накрыты полоской. Когда полоска, перемещаясь, накрывает следующую цифру, из-под нее освобождается точно такая же цифра. Следовательно, при перемещении полоски сумма накрытых чисел не изменяется, так что сумма 9 подряд идущих чисел всегда равна 45. Рассмотрим 1010 подряд идущих чисел b_n. Представим 1010 в виде суммы $9 \cdot 112 + 2 = 1008 + 2$. Группа из 1008 подряд идущих чисел b_n состоит из 112 девяток подряд идущих чисел b_n и независимо от расположения группы имеет сумму $45 \cdot 112 = 5040$. Выберем в таблице два подряд идущих числа b_n с наибольшей суммой: это b_5 =5 и b_6 =9, их сумма 14. Сразу за этими числами расположим еще 1008 подряд идущих чисел b_n. Получим 1010 подряд идущих членов последовательности с наибольшей суммой

$5040 + 14 = 5054$.

Ответ: а) 7. б) 5002. в) 5054.

Вариант 17

В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 50, а вместе солдат меньше чем 120. Ко-

мандир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

Решение.

Согласно условию, два взвода могут быть построены отдельно. Так и будем считать. Пусть a – число солдат в первом взводе и b – число солдат во втором взводе. Тогда

$$\begin{cases} 50 < a < b \\ a + b < 120 \end{cases}.$$

Число солдат в одном ряду обозначим k (по условию $k \geq 8$).

Определим границы значений a и b.

Сразу видим, что $a \geq 51$. Из неравенства $120 > a + b$ с учетом условия $b > a$ получаем $120 > 2a \Leftrightarrow a < 60$, поэтому $a \leq 59$. Следовательно, $51 \leq a \leq 59$.

Так как $b > a$, то по крайней мере $b \geq 52$. Из неравенства $b < 120 - a$ с учетом неравенства $-a \leq -51$ получаем $b < 69$, поэтому $b \leq 68$. Следовательно,

$$52 \leq b \leq 68.$$

Найдем возможные варианты значений a и b. Для этого заметим, что

$$b - a \leq 68 - 51 = 17,$$

то есть число солдат во втором взводе может превышать число солдат в первом взводе не более чем на 17. А так как составы взводов отличаются только целым числом рядов, то это означает, что в одном ряду может быть не более 17 солдат: $k \leq 17$. Теперь просто рассмотрим по порядку все значения $8 \leq k \leq 17$.

$k = 8$. Надо подобрать значение a, кратное 8 (число солдат взвода должно делиться на 8 нацело), к нему подобрать

значение b, тоже кратное 8, и чтобы было $a < b$ и $a + b < 120$. Имеется одно значение a, кратное 8: это $a = 56$. К нему почти подходит значение $b = 64$, однако $56 + 64 = 120$, а надо меньше. Неудача.

$k = 9$. Имеется одно значение a, кратное 9: это $a = 54$. К нему подходит значение $b = 63$ (кратное 9); $54 + 63 = 117 < 120$. *Вариант возможен.*

$k = 10$. Ни одно значение a не кратно 10. Неудача.

$k = 11$. Имеется одно значение a, кратное 11: это $a = 55$. К нему почти подходит значение $b = 66$, однако $55 + 66 = 121 > 120$. Неудача.

$k = 12$. Ни одно значение a не кратно 12. Неудача.

$k = 13$. Имеется одно значение a, кратное 13: это $a = 52$. К нему подходит значение $b = 65$ (кратное 13); $52 + 65 = 117 < 120$. *Вариант возможен.*

$k = 14$. Имеется одно значение a, кратное 14: это $a = 56$. Но к нему нет подходящего значения b (кратного 14 и большего чем 56). Неудача.

$k = 15$. Ни одно значение a не кратно 15. Неудача.

$k = 16$. Ни одно значение a не кратно 16. Неудача.

$k = 17$. Имеется одно значение a, кратное 17: это $a = 51$. К нему подходит значение $b = 68$ (кратное 17); $51 + 68 = 119 < 120$. *Вариант возможен.*

Теперь можем ответить на вопросы.

а) Например, 54 и 63: в первом взводе 6 рядов по 9 солдат, во втором взводе 7 таких рядов. Вместе 117 солдат.

б) Нельзя (значение $k = 11$ не подошло).

в) 117 и 119.

Ответ: а) Например, 54 и 63. б) Нет. в) 117 или 119.

Вариант 18 (совпадает с задачей 5.6.12 п.2.1),

Вариант 19 (совпадает с задачей 5.6.14 п.2.1)

Вариант 20

Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно 2?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно 4/3?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 20?

Решение.

Пусть даны $a, b, c \in N$. Так как они различны, то их можно расположить в порядке возрастания, соединив строгими неравенствами. Пусть $a < b < c$. Самая большая сторона c лежит против самого большого угла треугольника, так что тупым является угол C (рис.2.11). Так как $\cos C < 0$, то, используя теорему косинусов ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$), получаем неравенство $c^2 > a^2 + b^2$. Учитывая еще, что a – наименьшая сторона, имеем систему неравенств $\begin{cases} c^2 > a^2 + b^2, \\ a < b. \end{cases}$ Поделив первое неравенство на a^2, а второе на a, перейдем к равносильной системе

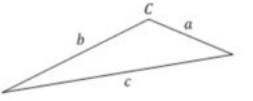


Рис.2.11

$$\begin{cases} (\frac{c}{a})^2 > 1 + (\frac{b}{a})^2 \\ 1 < \frac{b}{a} \end{cases}. \qquad (1)$$

а) Если $\frac{c}{a} = 2$ то система (1) имеет вид: $\begin{cases} 4 > 1 + (\frac{b}{a})^2 \\ 1 < \frac{b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \frac{b}{a} < \sqrt{3}.$

В качестве $\frac{b}{a}$ можно взять любую обыкновенную дробь из интервала $(1, \sqrt{3})$. Возьмем $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$. Далее можно взять $a = 2k$, $b = 3k$ при любом $k \in N$. Пусть $k = 1$. Тогда

$$a = 2, b = 3, c = 2a = 4.$$

Нашлись три подходящих числа 2, 3, 4, такие, что $4^2 > 2^2 + 3^2, 2 < 3, \frac{4}{2} = 2$. Ответ: может.

б) Если $\frac{c}{a} = \frac{4}{3}$, то система (1) имеет вид: $\begin{cases} \frac{16}{9} > 1 + (\frac{b}{a})^2 \\ 1 < \frac{b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \frac{b}{a} < \frac{\sqrt{7}}{9} \Rightarrow 9 < \sqrt{7}$ – противоречие. Ответ: не может.

в) Должно быть $\begin{cases} c^2 > a^2 + 20^2 \\ c < a + 20 \end{cases}$, и нужно минимизировать $\frac{c}{a}$.

Рассмотрим произвольное решение (a, c) системы и увеличим оба числа на единицу. Тогда по-прежнему $\begin{cases} (c+1)^2 > (a+1)^2 + 20^2, \\ c + 1 < (a+1) + 20 \end{cases}$ (к левой части первого неравенства прибавили $2c + 1$, а к правой – меньшее число $2a + 1$, к обеим частям второго неравенства прибавили поровну), то есть пара $(a', c') = (a + 1, c + 1)$ тоже является решением системы. Но при этом отношение уменьшилось ($\frac{c'}{a'} - \frac{c}{a} = \frac{c+1}{a+1} - \frac{c}{a} = \frac{a-c}{a(a+1)} < 0 \Rightarrow \frac{c'}{a'} < \frac{c}{a}$). Поэтому для уменьшения отношения $\frac{c}{a}$ будем, прибавляя единицу за единицей, увеличивать a и c до тех пор, пока a не достигнет наибольшего возможного значения 19 (по условию $a < 20$). На этом этапе отношение станет равным $\frac{c}{19}$ при некотором c.

Теперь для дальнейшего уменьшения отношения будем просто уменьшать c пока это возможно, то есть пока сохраняется неравенство

$$c^2 > 19^2 + 20^2 \Leftrightarrow c^2 > 761.$$

Так как $c^2 \in N$, то это равносильно неравенству $c^2 \geq 784$, то есть $c \geq 28$. Видим, что c можно уменьшать только до 28. Наименьшее отношение $\frac{c}{a}$ получается равным $\frac{28}{19}$.

При этом имеем треугольник 19, 20, 28.

Ответ. а) Может: 2, 3, 4. б) Не может. в) $\frac{28}{19}$.

Вариант 21

а) Существует ли такое кратное 11 трехзначное число, у которого вторая цифра в 14 раз меньше произведения двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трехзначное число, у которого сумма всех цифр равна 7?

в) Найдите наибольшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 9. Ответ обоснуйте.

Решение.

а) Пусть $\overline{abc}$ – позиционная запись трехзначного числа, a, b, c – его цифры ($a \geq 1$). Должно быть $\overline{abc} \vdots 11$, $b = \frac{1}{14}ac$. Будем подбирать цифру b.

Если $b = 1$, то $a = 2$, $c = 7$ или $a = 7$, $c = 2$. Оба числа 217 и 712 не $\vdots$ 11.

Если $b = 2$, то $a = 4$, $c = 7$ или $a = 7$, $c = 4$. Оба числа 427 и 724 не $\vdots$ 11.

Если $b = 3$, то $a = 6$, $c = 7$ или $a = 7$, $c = 6$. Оба числа 637 и 736 не $\vdots$ 11.

Если $b = 4$, то $a = 7$, $c = 8$ или $a = 8$, $c = 7$. Оба числа 748 и 847 кратны 11.

б) Используем признак делимости на 11, предварительно доказав его.

Натуральное число

$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \dots + 10^{n-1} a_{n-1} + 10^n a_n$ *делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится знакочередующаяся сумма его цифр* $a_0 - a_1 + a_2 - \dots$ *(взятых по порядку).*

Для доказательства сначала заметим, что все числа вида $10^{2k-1} + 1$ ($k \in N$), то есть числа 11, 1001, 100001, ...делятся на 11 (Это верно для $k = 1$, так как $10 + 1 \vdots 11$. Предположим, что утверждение верно для $k = n$, то есть $10^{2n-1} + 1 \vdots 11$. Тогда $10^{2(n+1)-1} + 1 = 10^{2n-1}10^2 + 1 = (10^{2n-1} + 1 - 1)10^2 + 1 = (10^{2n-1} + 1)10^2 - 99 \vdots 11$,

так как оба слагаемые делятся на 11. Показано, что утверждение верно для $k = n + 1$. Согдасно принципу математической индукции утверждение верно для всех натуральных k).

Данное число $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ распишем следующим образом:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} =$$
$$a_0 + (11a_1 - a_1) + (99a_2 + a_2) + (1001a_3 - a_3) + \dots =$$
$$(11a_1 + 99a_2 + 1001a_3 + 9999a_4 + 100001a_5 + \dots) +$$
$$(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \quad a_4 - a_5 + \dots).$$

Все слагаемые в первой скобке делятся на 11, поэтому число делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится вторая скобка (здесь пользуемся тем, что если $a, b \in Z, a \vdots c,\ b \vdots c$, то $a + b \vdots c$. Отсюда следует, что если сумма $S = (a + b) \vdots c$ и одно из слагаемых $a \vdots c$, то и второе слагаемое $b \vdots c$. Это потому, что в сумме $b = S + (-a)$ оба слагаемых нацело делятся на c).

Признак делимости на 11 доказан.

Пусть $\overline{abc}$ – позиционная запись трехзначного числа, a, b, c – его цифры ($a \geq 1$). Должно быть $\overline{abc} \vdots 11, a + b + c = 7$. По признаку делимости на 11 имеем

$$a - b + c \vdots 11.$$

Заметим, что $a - b + c$ может иметь наименьшее значение -8 (при $a = 1, b = 9, c = 0$) и наибольшее значение 18 (при $a = 9, b = 0, c = 9$). На отрезке $[-8, 18]$ два числа 0 и 11 кратны 11. Поэтому возможны два варианта: $a - b + c = 0$ и $a - b + c = 11$. Значит, либо

$$\begin{cases} a + b + c = 7 \\ a - b + c = 0 \end{cases}, \text{ либо } \begin{cases} a + b + c = 7 \\ a - b + c = 11 \end{cases}.$$

В первом случае сложив равенства, получим $2(a + c) = 7$, что невозможно, так как 7 нечетное число. Во втором случае вычитая равенства получим $2b = -4$, что для цифры b невозможно.

Ответ: не существует.

в) Надо разделить данные цифры в две группы по 4 с

суммами x и y так, чтобы выполнялось равенство $x + y = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 = 37$. Одна из групп будет состоять из цифр, стоящих в 8-значном числе на нечетных местах, другая – из цифр на четных местах. Заметим, что не может быть $x = y$, так как их сумма нечетная. Пусть $x > y$. Искомое 8-значное число кратно 11, поэтому согласно признаку делимости на 11 разность $x - y$ кратна 11. Выясним, в каких границах может находиться число $x - y$. Наименьшее возможное значение $1 - 5 + 2 - 6 + 3 - 7 + 4 - 9 = -17$, Наибольшее возможное значение

$$9 - 1 + 7 - 2 + 6 - 3 + 5 - 4 = 17.$$

На отрезке [-17, 17] содержится три числа, кратных 11: это $-11, 0, 11$. Так как $x - y > 0$, то $x - y = 11$. Из системы $\begin{cases} x + y = 37 \\ x - y = 11 \end{cases}$ находим

$$x = 24, \quad y = 13.$$

Теперь надо построить наибольшее 8-значное число так, чтобы сумма цифр на нечетных местах равнялась 24, а сумма цифр на четных местах 13, или наоборот, чтобы сумма цифр на нечетных местах равнялась 13, а на четных местах 24. Чтобы число было наибольшим, надо начиная слева подбирать максимальные цифры.

Будем надеяться, что начав число с цифр 9, 7, сможем получить результат. При таком начале сразу обнаруживается, что сумма цифр на нечетных местах не может равняться 13. В самом деле, если на 3-е место поставим любую из оставшихся цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, то добавление суммы оставшихся двух цифр на 5-м и 7-м местах к полученной сумме цифр на 1-м и 3-м местах не дает 13 (например, если начнем число с цифр 9, 7, 3, то на 1-м и 3-м местах получим сумму 12, на оставшихся двух местах надо получить сумму 1 из имеющихся к этому моменту цифр 1, 2, 4, 5, 6, что невозможно). Таким образом, начав строить число с цифр 9, 7, мы выбрали сумму цифр на нечетных местах равной 24, а сумму цифр на четных местах равной 13. Для оставшихся трех четных мест имеем сумму

$13 - 7 = 6$. Из оставшихся цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 только одна тройка дает такую сумму: тройка 1, 2, 3. Расположим их в числе в убывающем порядке: 9 7 **– 3 – 2 – 1**. Оставшимися цифрами 4, 5, 6 заполним оставшиеся нечетные места, расположив в порядке убывания: 9 7 **6** 3 **5** 2 **4** 1.

Получили наименьшее кратное 11 восьмизначное число 97 635 241.

Ответ: а) существуют: 748 и 847. б) не существует. в) 97 635 241.

Вариант 22

а) Существует ли такое кратное 11 трехзначное число, у которого вторая цифра равна произведению двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трехзначное число, у которого сумма всех цифр
равна 5?

в) Найдите наименьшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9.

Ответ обоснуйте.

Решение.

а) Пусть $\overline{abc}$ – позиционная запись трехзначного числа, a, b, c – его цифры ($a \geq 1$).

Должно быть $\overline{abc} \vdots 11$, $b = ac$. Будем подбирать цифру b.

Если $b = 1$, то $a = c = 1$, число 111 не $\vdots$ 11.

Если $b = 2$, то $a = 1$, $c = 2$ или $a = 2$, $c = 1$. Числа 122 и 221 не $\vdots$ 11.

Если $b = 3$, то $a = 1$, $c = 3$ или $a = 3$, $c = 1$. Числа 133 и 331 не $\vdots$ 11.

Подходит значение $b = 4$, если взять $a = c = 2$. Число $242 \vdots 11$.

б) Используем признак делимости на 11, предварительно доказав его.

Натуральное число

$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \dots + 10^{n-1} a_{n-1} + 10^n a_n$ *делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится знакочередующаяся сумма его цифр* $a_0 - a_1 + a_2 - \dots$ *(взятых по порядку).*

Для доказательства сначала заметим, что все числа вида $10^{2k-1} + 1$ ($k \in N$), то есть числа 11, 1001, 100001, ...делятся на 11 (Это верно для $k = 1$, так как $10 + 1 \vdots 11$. Предположим, что утверждение верно для $k = n$, то есть $10^{2n-1} + 1 \vdots 11$. Тогда $10^{2(n+1)-1} + 1 = 10^{2n-1}10^2 + 1 = (10^{2n-1} + 1 - 1)10^2 + 1 =$ $(10^{2n-1} + 1)10^2 - 99 \vdots 11$, так как оба слагаемые делятся на 11. Показано, что утверждение верно для $k = n + 1$. Согдасно принципу математической индукции утверждение верно для всех натуральных k).

Данное число $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ распишем следующим образом:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = (11a_1 + 99a_2 + 1001a_3 + 9999a_4 + 100001a_5 + \dots) + (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots).$$

Все слагаемые в первой скобке делятся на 11, поэтому число делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится вторая скобка

(здесь пользуемся тем, что если $a, b \in Z, a \vdots c,\ b \vdots c$, то $a + b \vdots c$. Отсюда следует, что если сумма $S = (a + b) \vdots c$ и одно из слагаемых $a \vdots c$, то и второе слагаемое $b \vdots c$. Это потому, что в сумме $b = S + (-a)$ оба слагаемых нацело делятся на c).

Признак делимости на 11 доказан.

Пусть $\overline{abc}$ – позиционная запись трехзначного числа, a, b, c – его цифры ($a \geq 1$). Должно быть $\overline{abc} \vdots 11$, $a + b + c = 5$. По признаку делимости на 11 имеем $a - b + c \vdots 11$. Заметим, что $a - b + c$ может иметь наименьшее значение -8 (при $a = 1, b = 9, c = 0$) и наибольшее значение 18 (при $a = 9, b = 0, c = 9$). На отрезке $[-8, 18]$ два числа 0 и 11 кратны 11.

Поэтому возможны два варианта: $a-b+c=0$ и $a-b+c=11$. Значит, либо $\begin{cases} a+b+c=5 \\ a-b+c=0 \end{cases}$, либо $\begin{cases} a+b+c=5 \\ a-b+c=11 \end{cases}$.

В первом случае сложив равенства, получим $2(a+c)=5$, что невозможно, так как 5 нечетное число. Во втором случае вычитая равенства получим $2b=-6$, что для цифры b невозможно.

Ответ: не существует.

в) Надо разделить данные цифры в две группы по 4 с суммами x и y так, чтобы выполнялось равенство $x+y=1+2+3+4+5+7+8+9=39$. Одна из групп будет состоять из цифр, стоящих в 8-значном числе на нечетных местах, другая – из цифр на четных местах. Заметим, что не может быть $x=y$, так как их сумма нечетная. Пусть $x>y$. Искомое 8-значное число кратно 11, поэтому согласно признаку делимости на 11 разность $x-y$ кратна 11. Выясним, в каких границах может находиться число $x-y$. Наименьшее возможное значение $1-5+2-7+3-8+4-9=-19$, Наибольшее возможное значение $9-1+8-2+7-3+5-4=19$. На отрезке [-19, 19] содержится три числа, кратных 11: это $-11, 0, 11$. Так как $x-y>0$, то $x-y=11$. Из системы $\begin{cases} x+y=39 \\ x-y=11 \end{cases}$ находим

$$x=25,\ \ y=14.$$

Теперь надо построить наименьшее 8-значное число так, чтобы сумма цифр на нечетных местах равнялась 25, а сумма цифр на четных местах 14, или наоборот, чтобы сумма цифр на нечетных местах равнялась 14, а на четных местах 25. Чтобы число было наименьшим, надо начиная слева подбирать минимальные цифры.

Будем надеяться, что начав число с цифр 1, 2, сможем получить результат. При таком начале сразу обнаруживается, что сумма цифр на нечетных местах не может равняться 14. В самом деле, если на 3-е место поставим любую из оставшихся цифр 3, 4, 5, 7, 8, 9, то добавление суммы оставшихся двух цифр на 5-м и 7-м местах к полученной сумме цифр на 1-м и 3-м

местах не дает 14 (например, если начнем число с цифр 1, 2, 3, то на 1-м и 3-м местах получим сумму 4, на оставшихся двух местах надо получить сумму 10 из имеющихся к этому моменту цифр 4, 5, 7, 8, 9. Но ни одна пара этих цифр не дает в сумме 10). Таким образом, начав строить число с цифр 1,2, мы выбрали сумму цифр на нечетных местах равной 25, а сумму цифр на четных местах равной 14. Для оставшихся трех четных мест имеем сумму 14 – 2 = 12. Из оставшихся цифр 3, 4, 5, 7, 8, 9 только одна тройка дает такую сумму: тройка 3, 4, 5. Расположим их в числе в возрастающем порядке: 1 2 – **3 – 4 – 5**. Оставшимися цифрами 7, 8, 9 заполним оставшиеся нечетные места, расположив в порядке возрастания: 1 2 **7** 3 **8** 4 **9** 5.

Получили наименьшее кратное 11 восьмизначное число 12 738 495.

Ответ: а) существует: 242. б) не существует. в) 12 738 495.

Вариант 23

На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 8, если сначала по одному разу были написаны числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 54, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 200 до 299 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 200 до 299 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

Решение.

а) Сумма первоначально написанных чисел равна 75.

(Это 10 членов арифметической прогрессии: $a_1 = 3$, $d = 1$, $a_{10} = 12$. По формуле суммы n членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} n$ находим: $S_{10} = \frac{3+12}{2} 10 = 75$).

После любого числа стираний из этой суммы вычитается число, кратное 3 – вычитается число $3m$, где m – некоторое натуральное число. Остается сумма $75 - 3m$. Если $75 - 3m = 8$, то $3m = 67$, что невозможно, так как 67 не делится на 3. Ответ: не может.

б) Привлечем известную теорему о делении с остатком:

Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых числа q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$.

Используем остатки чисел при делении на 3. Пусть (m, n) – стираемая пара чисел. Тогда $m = 3q_1 + r_1, n = 3q_2 + r_2$, где $q_1, q_2, r_1, r_2 \in Z$, $0 \leq r_1, r_2 \leq 2$. Сумма стираемой пары равна

$$m + n = 3(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2).$$

По условию $m + n \vdots 3$, значит, и $r_1 + r_2 \vdots 3$.

(здесь пользуемся тем, что если $a, b \in Z, a \vdots c$, $b \vdots c$, то $a + b \vdots c$. Отсюда следует, что если сумма $S = (a + b) \vdots c$ и одно из слагаемых $a \vdots c$, то и второе слагаемое $b \vdots c$. Это потому, что в сумме $b = S + (-a)$ оба слагаемых нацело делятся на c).

Так как $0 \leq r_1 + r_2 \leq 4$, то либо $r_1 + r_2 = 0$, либо $r_1 + r_2 = 3$. В первом случае $r_1 = r_2 = 0$, во втором случае имеем варианты $(r_1, r_2) = (1, 2)$, и $(2, 1)$ или – без учета порядка – вариант $(1, 2)$.

Остатки	0	1	2
Данные числа			200
	201	202	203
	204	205	206
			...
	294	295	296
	297	298	299

Табл.2.12

Итак, стираются пары чисел, имеющие пары остатков $(0, 0)$ и $(1, 2)$. Посмотрим, сколько пар может остаться после всех стираний. Составим таблицу (табл.2.12), расположив данные числа в столбцы по их остаткам

при делении на 3. В этой таблице 33 полных строк (они содержат числа 201, 202, ..., 299 – всего $299 - 200 = 99$ чисел по 3 в строке).

Остаток 0 при делении на 3 имеют 33 числа.

Остаток 1 имеют 33 числа.

Остаток 2 имеют $33 + 1 = 34$ числа.

С остатками $(0,\ 0)$ можно стереть 16 пар чисел, одно число с остатком 0 не может быть стерто. С остатками $(1, 2)$ можно стереть 33 пары, одно число с остатком 2 не может быть стерто. Если должны остаться два числа, то одно из них с остатком 0, другое с остатком 2. Пусть это числа

$$a = 3q_1 + 0 \text{ и } b = 3q_2 + 2.$$

Если $|a - b| = 54$, то $|3(q_1 - q_2) - 2| = 54 \Rightarrow 3(q_1 - q_2) - 2 = \mp 54$, т.е. $3(q_1 - q_2) = -52$ или $3(q_1 - q_2) = 56$. Но -52 и 56 не делятся на 3, поэтому ответ отрицательный.

в) Из предыдущего пункта знаем, что на доске остались два числа, имеющие при делении на 3 остатки 0 и 2. Поэтому имеем два варианта 1) выберем в таблице максимальное число с остатком 0 и минимальное число с остатком 2. Получим частное $\frac{297}{200}$. 2) выберем в таблице максимальное число с остатком 2 и минимальное число с остатком 0. Получим частное $\frac{299}{201}$. Так как $\frac{299}{201} > \frac{297}{200}$, то выбираем наибольшее значение $\frac{299}{201}$.

Ответ: а) Нет. б) Нет. в) $\frac{299}{201}$.

Примечание. В сборнике ответ а) «Может» неправильный.

Вариант 24

На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 11, если сначала по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность

между которыми равна 24, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 151 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 151 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

Решение.

Привлечем известную теорему о делении с остатком:

Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r,\ 0 \leq r < |b|$.

Используем остатки чисел при делении на 3. Пусть (m, n) – стираемая пара чисел. Тогда $m = 3q_1 + r_1, n = 3q_2 + r_2$, где $q_1, q_2, r_1, r_2 \in Z,\ 0 \leq r_1, r_2 \leq 2$. Сумма стираемой пары равна

$$m + n = 3(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2).$$

По условию $m + n \vdots 3$, значит, и $r_1 + r_2 \vdots 3$

(здесь пользуемся тем, что если $a, b \in Z, a \vdots c,\ b \vdots c$, то $a + b \vdots c$. Отсюда следует, что если сумма $S = (a + b) \vdots c$ и одно из слагаемых $a \vdots c$, то и второе слагаемое $b \vdots c$. Это потому, что в сумме $b = S + (-a)$ оба слагаемых нацело делятся на c).

Так как $0 \leq r_1 + r_2 \leq 4$, то либо $r_1 + r_2 = 0$, либо $r_1 + r_2 = 3$. В первом случае $r_1 = r_2 = 0$, во втором случае имеем варианты $(r_1, r_2) = (1, 2)$ и $(2, 1)$, или – без учета порядка – вариант $(1, 2)$.

Остатки	0	1	2
Данные числа			2
	3	4	5
	6	7	8
	9	10	11

Табл.2.13

Итак, стираются пары чисел, имеющие пары остатков $(0,\ 0)$ и $(1, 2)$.

а) Составим таблицу (табл.2.13), расположив данные числа в столбцы по их остаткам при делении

на 3.
Остаток 0 при делении на 3 имеют 3 числа.
Остаток 1 имеют 3 числа.
Остаток 2 имеют 4 числа.
С остатками (0, 0) можно стереть 1 пару чисел. С остатками (1, 2) можно стереть 3 пары. Если их все стереть, при любом варианте останется не стертым одно число с остатком 0 и одно число с остатком 2. Мы оставим 6 и 5. Сумма оставшихся чисел будет равна $6 + 5 = 11$. Ответ: может.

б), в) Повторяется решение варианта 23 при диапазоне чисел 100 – 151 вместо 200 – 299.

Ответ: а) Да. б) Нет. в)1,5.

Вариант 25

На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 13, если сначала по одному разу были написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 21, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 140 до 191 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 140 до 191 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

Решение.

Привлечем известную теорему о делении с остатком:

Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых числа q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r,\ 0 \leq r < |b|$.

Используем остатки чисел при делении на 3. Пусть (m, n) –

стираемая пара чисел. Тогда $m = 3q_1 + r_1, n = 3q_2 + r_2$, где $q_1, q_2, r_1, r_2 \in Z$, $0 \le r_1, r_2 \le 2$. Сумма стираемой пары равна

$$m + n = 3(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2).$$

По условию $m + n \vdots 3$, значит, и $r_1 + r_2 \vdots 3$

(здесь пользуемся тем, что если $a, b \in Z, a \vdots c$, $b \vdots c$, то $a + b \vdots c$. Отсюда следует, что если сумма $S = (a + b) \vdots c$ и одно из слагаемых $a \vdots c$, то и второе слагаемое $b \vdots c$. Это потому, что в сумме $b = S + (-a)$ оба слагаемых нацело делятся на c).

Так как $0 \le r_1 + r_2 \le 4$, то либо $r_1 + r_2 = 0$, либо $r_1 + r_2 = 3$. В первом случае $r_1 = r_2 = 0$, во втором случае имеем варианты $(r_1, r_2) = (1, 2)$ и $(2, 1)$, или – без учета порядка – вариант $(1, 2)$.

Итак, стираются пары чисел, имеющие пары остатков $(0, 0)$ и $(1, 2)$.

а) Составим таблицу (табл.2.14), расположив данные числа в столбцы по их остаткам при делении на 3.

Остаток 0 при делении на 3 имеют 3 числа.

Остаток 1 имеют 4 числа.

Остаток 2 имеют 3 числа.

Остатки	0	1	2
Данные числа			2
	3	4	5
	6	7	8
	9	10	

Табл.2.14

С остатками $(0, 0)$ можно стереть 1 пару чисел. С остатками $(1, 2)$ можно стереть 3 пары. Если их все стереть, при любом варианте останется не стертым одно число с остатком 0 и одно число с остатком 1. Мы оставим 3 и 10. Сумма оставшихся чисел будет равна $3 + 10 = 13$. Ответ: может.

б), в) Повторяется решение варианта 23 при диапазоне чисел 140 – 191 вместо 200 – 299.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) $\frac{191}{141}$.

Вариант 26

На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 20, если сначала по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 45, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 103 до 208 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 103 до 208 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

Решение.

Привлечем известную теорему о делении с остатком:

Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$.

Используем остатки чисел при делении на 5. Пусть (m, n) – стираемая пара чисел. Тогда $m = 5q_1 + r_1, n = 5q_2 + r_2$, где $q_1, q_2, r_1, r_2 \in Z$, $0 \leq r_1, r_2 \leq 4$. Сумма стираемой пары равна

$$m + n = 5(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2).$$

По условию $m + n \vdots 5$, значит, и $r_1 + r_2 \vdots 5$

(здесь пользуемся тем, что если $a, b \in Z, a \vdots c$, $b \vdots c$, то $a + b \vdots c$. Отсюда следует, что если сумма $S = (a + b) \vdots c$ и одно из слагаемых $a \vdots c$, то и второе слагаемое $b \vdots c$. Это потому, что в сумме $b = S + (-a)$ оба слагаемых нацело делятся на c).

Так как $0 \leq r_1 + r_2 \leq 8$, то либо $r_1 + r_2 = 0$, либо $r_1 + r_2 = 5$. В первом случае $r_1 = r_2 = 0$, во втором случае имеем варианты $(r_1, r_2) = (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)$, или – без учета порядка – варианты $(1, 4)$ и $(2, 3)$.

Итак, стираются пары чисел, имеющие пары остатков $(0, 0), (1, 4)$ и $(2, 3)$.

а) Составим таблицу (табл.2.15), расположив данные числа в столбцы по их остаткам при делении на 5.

Остаток 0 при делении на 5 имеют 2 числа.
Остаток 1 имеют 2 числа.
Остаток 2 имеют 3 числа.
Остаток 3 имеют 3 числа.
Остаток 4 имеют 2 числа.

Остатки	0	1	2	3	4
Данные числа			2	3	4
	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	

Табл.2.15

С остатками (0, 0) можно стереть 1 пару чисел,. С остатками (1, 4) можно стереть 2 пары. С остатками (2, 3) можно стереть 3 пары. Все числа могут быть стерты. Мы оставим пару с остатками (0, 0), т.е. пару чисел 5,10, и одну пару с остатками (2, 3) – пару чисел 2, 3. Остальные числа сотрем. Сумма оставшихся чисел будет равна $5 + 10 + 2 + 3 = 20$.
Ответ: может.

Остатки	0	1	2	3	4
Данные числа				103	104
	105	106	107	108	109
	110	111	112	113	114
			...		
	200	201	202	203	204
	205	206	207	208	

Табл.2.16

б) Как и в предыдущем пункте, составим таблицу (табл.2.16). Посмотрим, сколько пар может остаться после всех стираний. В этой таблице 20 полных строк (они содержат числа 105, 106, ..., 204 – всего $204 - 104 = 100$ чисел по 5 в строке).

Остаток 0 при делении на 5 имеет $20 + 1 = 21$число.
Остаток 1 имеет $20 + 1 = 21$число.
Остаток 2 имеет $20 + 1 = 21$число.
Остаток 3 имеет $20 + 2 = 22$числа.
Остаток 4 имеет $20 + 1 = 21$число.

С остатками (0, 0) можно стереть 10 пар чисел, одно число с остатком 0 не может быть стерто. С остатками (1, 4) можно стереть 21 пару. С остатками (2, 3) можно стереть 21 пару, одно

число с остатком 3 не может быть стерто. Если должны остаться два числа, то одно из них с остатком 0, другое с остатком 3. Пусть это числа $a = 5q_1 + 0$ и $b = 5q_2 + 3$. Если $|a - b| = 45$, то $|5(q_1 - q_2) - 3| = 45 \Rightarrow 5(q_1 - q_2) - 3 = \mp 45$, т.е. $5(q_1 - q_2) = -42$ или $5(q_1 - q_2) = 48$. Но -42 и 48 не делятся на 5, поэтому ответ отрицательный.

в) Из предыдущего пункта знаем, что на доске остались два числа, имеющие при делении на 5 остатки 0 и 3. Поэтому имеем два варианта 1) выберем в таблице максимальное число с остатком 0 и минимальное число с остатком 3. Получим частное $\frac{205}{103}$. 2) выберем в таблице максимальное число с остатком 3 и минимальное число с остатком 0. Получим частное $\frac{208}{105}$. Так как $\frac{205}{103} > \frac{208}{105}$, то выбираем наибольшее значение $\frac{205}{103}$.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) $\frac{205}{103}$.

Вариант 27

На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 24, если сначала по одному разу были написаны числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,14?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 45, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 53 до 158 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 53 до 158 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

Решение.

а) Сумма первоначально написанных чисел равна 102. После любого числа стираний из этой суммы вычитается число,

кратное 5 – вычитается число $5m$, где m – некоторое целое число. Остается сумма $102-5m$. Если $102-5m=24$, то $5m=78$, что невозможно, так как 78 не делится на 5. Ответ: не может.

б) Привлечем известную теорему о делении с остатком:

Каковы бы ни были целое число a и целое число $b\neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых q (частное) и r (остаток), что $a=bq+r,\ 0\le r<|b|$.

Используем остатки чисел при делении на 5. Пусть (m,n) – стираемая пара чисел. Тогда $m=5q_1+r_1, n=5q_2+r_2$, где $q_1,q_2,r_1,r_2\in Z,\ 0\le r_1,r_2\le 4$. Сумма стираемой пары равна $m+n=5(q_1+q_2)+(r_1+r_2)$. По условию $m+n\vdots 5$, значит, и $r_1+r_2\vdots 5$

(здесь пользуемся тем, что если $a,b\in Z, a\vdots c,\ b\vdots c$, то $a+b\vdots c$. Отсюда следует, что если сумма $S=(a+b)\vdots c$ и одно из слагаемых $a\vdots c$, то и второе слагаемое $b\vdots c$. Это потому, что в сумме $b=S+(-a)$ оба слагаемых нацело делятся на c).

Так как $0\le r_1+r_2\le 8$, то либо $r_1+r_2=0$, либо $r_1+r_2=5$. В первом случае $r_1=r_2=0$, во втором – варианты $(r_1,r_2)=(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)$, или – без учета порядка – варианты $(1,4)$ и $(2,3)$.

Итак, стираются пары чисел, имеющие пары остатков $(0,\ 0),(1,4)$ и $(2,3)$. Посмотрим, сколько пар может остаться после всех стираний. Составим таблицу (табл.2.17), расположив данные числа в столбцы по их остаткам при делении на 5. В этой таблице 20 полных строк (они содержат числа 55, 56, ..., 154 – всего $154-54=100$ чисел по 5 в строке).

Остаток 0 при делении на 5 имеет

$20+1=21$число.

Остаток 1 имеет $20+1=21$число.

Остаток 2 имеет $20+1=21$число.

Остаток 3 имеет $20+2=22$числа.

Остаток 4 имеет $20+1=21$число.

С остатками $(0,\ 0)$ можно стереть 10 пар чисел, одно число с остатком 0 не может быть стерто. С остатками $(1, 4)$ можно стереть 21 пару. С остатками $(2, 3)$ можно стереть 21 пару, одно число с остатком 3 не может быть стерто. Если должны остаться два числа, то одно из них с остатком 0, другое с остатком 3. Пусть это числа $a = 5q_1 + 0$ и $b = 5q_2 + 3$. Если $|a - b| = 45$, то $|5(q_1 - q_2) - 3| = 45 \Rightarrow 5(q_1 - q_2) - 3 = \mp 45$, т.е. $5(q_1 - q_2) = -42$ или $5(q_1 - q_2) = 48$. Но -42 и 48 не делятся на 5, поэтому ответ отрицательный.

Остатки	0	1	2	3	4
Данные числа				53	54
	55	56	57	58	59
	60	61	62	63	64
			...		
	150	151	152	153	154
	155	156	157	158	

Табл.2.17

в) Из предыдущего пункта знаем, что на доске остались два числа, имеющие при делении на 5 остатки 0 и 3. Поэтому имеем два варианта 1) выберем в таблице максимальное число с остатком 0 и минимальное число с остатком 3. Получим частное $\frac{155}{53}$. 2) выберем в таблице максимальное число с остатком 3 и минимальное число с остатком 0. Получим частное $\frac{158}{55}$. Так как $\frac{155}{53} > \frac{158}{55}$, то выбираем наибольшее значение $\frac{155}{53}$.

Ответ: а) Нет. б) Нет. в) $\frac{155}{53}$.

Примечание. В сборнике ответ а) «Может» неправильный.

Вариант 28

Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ натуральных чисел, причем при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство

$$3a_{k+2} = 5a_{k+1} - 2a_k.$$

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 4$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство

$$a_n = 3a_2 - 2a_1?$$

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 667$?

Решение.

Попробуем получить формулу для $n-$ го члена последовательности. Имеем

$$a_{k+2} = \frac{5a_{k+1}-2a_k}{3} = \frac{3a_{k+1}+2a_{k+1}-2a_k}{3} = a_{k+1} + \frac{2}{3}(a_{k+1} - a_k) \Rightarrow$$

$$a_{k+2} - a_{k+1} = \frac{2}{3}(a_{k+1} - a_k).$$

Пусть $a_{k+1} - a_k = b_k$ (по условию $b_k > 0$). Тогда $b_{k+1} = \frac{2}{3}\, b_k$, то есть получилась геометрическая прогрессия из натуральных чисел (b_k) с первым членом $b_1 = a_2 - a_1$ и знаменателем $q = \frac{2}{3}$. Свяжем a_n с этой прогрессией, для чего представим его в виде

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$$

(если откроем скобки, то каждое положительное число, начиная с первого, уничтожится с отрицательным числом в следующей скобке, останется только последнее положительное число a_n. Отрицательных чисел не останется, так как каждое отрицательное число, начиная с последнего, уничтожится с положительным числом в предыдущей скобке). Подставляя $a_{k+1} - a_k = b_k\, (1 \leq k \leq n-1)$, получим $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1}$.

По формуле суммы членов геометрической прогрессии

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} = b_1 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}} = 3b_1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right),$$

поэтому

$$a_n = a_1 + 3b_1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) \qquad (1)$$

где $b_1 = a_2 - a_1$.

а) По формуле (1)

$$a_3 = a_1 + 3b_1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right) = a_1 + \frac{5}{3}b_1,$$

$a_4 = a_1 + 3b_1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right) = a_1 + \frac{19}{9}b_1$.

Можно взять любое натуральное число $a_1 \geq 1$ и любое натуральное число b_1, кратное 9. Например, $a_1 = 1$, $b_1 = 27$. Тогда

$$a_2 = a_1 + b_1 = 28,\ a_3 = a_1 + \frac{5}{3}b_1 = 46, a_4 = a_1 + \frac{19}{9}b_1 = 58.$$

Получилась последовательность 1, 28, 46, 58.

б) Допустим, что $a_n = 3a_2 - 2a_1$. По формуле (1)

$$a_1 + 3b_1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) = 3a_2 - 2a_1.$$

Подставим $a_2 = a_1 + b_1$. Тогда $3b_1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) = 3b_1$. Так как $3b_1 \neq 0$, то $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$. Но это невозможно.

Ответ: не может.

в) По формуле (1) $a_n = a_1 + 3b_1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) = a_1 + 3b_1 - \frac{2^{n-1}b_1}{3^{n-2}}$.

Так как $\frac{2^{n-1}b_1}{3^{n-2}} \in N$, то b_1 нацело делится на 3^{n-2}:

$$b_1 = 3^{n-2}m \text{ при некотором } m \in N.$$

Выясним границу, которую наверняка не может превзойти n – число членов последовательности. Из последнего равенства видим, что $b_1 \geq 3^{n-2}$. С другой стороны, $b_1 = a_2 - a_1 < a_2 < a_n = 667$. Поэтому $3^{n-2} < 667$. Учитывая, что ближайшей к числу 667 (сверху) степенью числа 3 является $3^6 = 729$, можем записать $3^{n-2} < 729$, то есть $3^{n-2} < 3^6$. Отсюда следует, что $n < 8 \Leftrightarrow n \leq 7$. Итак, n не может превзойти 7, и достаточно перебрать случаи $n = 3, 4, 5, 6, 7$.

$n = 3$. $b_1 = 3m$, $a_3 = a_1 + 3b_1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = a_1 + \frac{5}{3}b_1$,

$$667 = a_1 + 5m \Leftrightarrow 667 - a_1 = 5m.$$

Наименьшим значением a_1, при котором разность $667 - a_1$ кратна 5, является $a_1 = 2$.

Осталось проверить, не получится ли меньшее значение $a_1 = 1$ при других значениях n.

$$n = 4.\quad b_1 = 9m,\ a_4 = a_1 + 3b_1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right) = 1 + \frac{19}{9}b_1,$$
$$667 = 1 + 19m \Leftrightarrow 19m = 666.$$

Но 666 не кратно 19, и этот случай невозможен.

$$n = 5.\quad b_1 = 27m,\ a_5 = a_1 + 3b_1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4\right) = 1 + \frac{65}{27}b_1,$$
$$667 = 1 + 65m \Leftrightarrow 65m = 666.$$

Но 666 не кратно 65, и этот случай невозможен.

$$n = 6.\quad b_1 = 81m,\ a_6 = a_1 + 3b_1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5\right) = 1 + \frac{211}{81}b_1,$$
$$667 = 1 + 211m \Leftrightarrow 211m = 666.$$

Но 666 не кратно 211, и этот случай невозможен.

$$n = 7.\quad b_1 = 243m,\ a_7 = a_1 + 3b_1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6\right) = 1 + \frac{665}{243}b_1,$$
$$667 = 1 + 665m \Leftrightarrow 665m = 666.$$

Но 666 не кратно 665, и этот случай так же невозможен.

Итак, a_1 имеет наименьшее значение 2 при $n = 3$. При $a_1 = 2$ имеем

$667 - a_1 = 5m \Rightarrow m = 133,\ b_1 = 3m = 399,\ a_2 = a_1 + b_1 = 401.$

Получаем последовательность 2, 401, 667, удовлетворяющую условию задачи.

Ответ: а) Например, 1, 28, 46, 58. б) Нет. в) 2.

Вариант 29

Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно 13/7?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно 8/7?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 25?

Решение.

Пусть даны $a, b, c \in N$. Так как они различны, то их можно расположить в порядке возрастания, соединив строгими

неравенствами.

Пусть $a < b < c$. Самая большая сторона c лежит против самого большого угла треугольника, так что тупым является угол C (рис.2.18). Так как $\cos C < 0$, то, используя теорему косинусов ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$), получаем неравенство $c^2 > a^2 + b^2$. Учитывая еще, что a – наименьшая сторона, имеем систему неравенств $\begin{cases} c^2 > a^2 + b^2, \\ a < b. \end{cases}$ Поделив первое неравенство на a^2, а второе на a, перейдем к равносильной системе

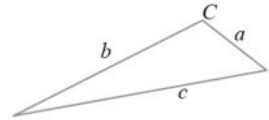


Рис.2.18

$$\begin{cases} (\frac{c}{a})^2 > 1 + (\frac{b}{a})^2 \\ 1 < \frac{b}{a} \end{cases}. \qquad (1)$$

а) Если $\frac{c}{a} = \frac{13}{7}$ то система (1) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{169}{49} > 1 + (\frac{b}{a})^2 \\ 1 < \frac{b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \frac{b}{a} < \frac{2\sqrt{30}}{7}.$$

В качестве $\frac{b}{a}$ можно взять любую обыкновенную дробь из интервала $(1, \frac{2\sqrt{30}}{7})$. Так как $5 < \sqrt{30}$, то $\frac{2\cdot 5}{7} < 2\frac{\sqrt{30}}{7} \Rightarrow \frac{10}{7} \in \left(1, \frac{2\sqrt{30}}{7}\right)$. Поэтому можем взять $\frac{b}{a} = \frac{10}{7}$. Далее можно брать $a = 7k$, $b = 10k$ при любом $k \in N$. Пусть, например, $k = 3$. Тогда

$$a = 21, b = 30, c = \frac{13}{7}a = 39.$$

Нашлись три подходящих числа 21, 30, 39, такие, что $39^2 > 21^2 + 30^2$, $21 < 30$. $\frac{39}{21} = \frac{13}{7}$. Ответ: может.

б) Если $\frac{c}{a} = \frac{8}{7}$, то система (1) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{64}{49} > 1 + (\frac{b}{a})^2 \\ 1 < \frac{b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \frac{b}{a} < \frac{\sqrt{15}}{7} \Rightarrow 7 < \sqrt{15}$$ – противоречие. Ответ: не может.

в) Должно быть $\begin{cases} c^2 > a^2 + 25^2, \\ c < a + 25 \end{cases}$, и нужно минимизировать $\frac{c}{a}$.

Рассмотрим произвольное решение (a, c) системы и увеличим оба числа на единицу. Тогда по-прежнему $\begin{cases} (c+1)^2 > (a+1)^2 + 25^2, \\ c + 1 < (a+1) + 25 \end{cases}$ (к левой части первого неравенства прибавили $2c + 1$, а к правой – меньшее число $2a + 1$, к обеим частям второго неравенства прибавили поровну), то есть пара $(a', c') = (a + 1, c + 1)$ тоже является решением системы. Но при этом отношение уменьшилось ($\frac{c'}{a'} - \frac{c}{a} = \frac{c+1}{a+1} - \frac{c}{a} = \frac{a-c}{a(a+1)} < 0 \Rightarrow \frac{c'}{a'} < \frac{c}{a}$). Поэтому для уменьшения отношения $\frac{c}{a}$ будем, прибавляя единицу за единицей, увеличивать a и c до тех пор, пока a не достигнет наибольшего возможного значения 24 (по условию $a < 25$). На этом этапе отношение станет равным $\frac{c}{24}$ при некотором c.

Теперь для дальнейшего уменьшения отношения будем просто уменьшать c пока это возможно, то есть пока сохраняется неравенство $c^2 > 24^2 + 25^2 \Leftrightarrow c^2 > 1201$. Так как $c^2 \in N$, то это равносильно неравенству $c^2 \geq 1225$, то есть $c \geq 35$. Видим, что число c можно уменьшать только до 35. Наименьшее отношение $\frac{c}{a}$ получается равным $\frac{35}{24}$. При этом имеем треугольник 24, 25 35.

Ответ. а) Может: 21, 30, 39. б) Не может. в) $\frac{35}{24}$.

Вариант 30.

Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно 3/2?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно 5/4?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 18?

Решение.

Повторяется решение варианта 29 с другими числовыми данными. Рассмотрим только п. а).

Если $\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$, то система (1) имеет вид: $\begin{cases}\frac{9}{4}>1+(\frac{b}{a})^2\\ 1<\frac{b}{a}\end{cases}\Leftrightarrow 1<\frac{b}{a}<\frac{\sqrt{5}}{2}$.

В качестве $\frac{b}{a}$ можно взять любую обыкновенную дробь из интервала $(1,\frac{\sqrt{5}}{2})$. Так как $2{,}2<\sqrt{5}$, то $1{,}1<\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\frac{11}{10}\in(1,\frac{\sqrt{5}}{2})$. Поэтому можем взять $\frac{b}{a}=\frac{11}{10}$. Далее можно брать $a=10k, b=11k$ при любом $k\in N$. Пусть, например, $k=1$. Тогда $a=10, b=11, c=\frac{3}{2}a=15$. Нашлись три подходящих числа 10, 11, 15, такие, что $15^2>10^2+11^2$, $10<11$. $\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$. Ответ: может.

Ответ. а) Может: 10, 11, 15. б) Не может. в) $\frac{25}{17}$.

Вариант 31

Конечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n\geq 3$ натуральных чисел, причём при всех натуральных $k\leq n-2$ выполнено равенство

$$a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k-1.$$

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$, в которой $a_5=4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из трёхзначных чисел?

Решение.

Из данного равенства видно, что последовательность (a_k) полностью определяется выбором первых двух членов a_1 и a_2.

Попробуем получить формулу для $k-$ го члена последовательности. Имеем

$$a_{k+2} = a_{k+1} + a_{k+1} - a_k - 1 \Rightarrow a_{k+2} - a_{k+1} = a_{k+1} - a_k - 1.$$

Пусть $a_{k+1} - a_k = b_k$. Тогда $b_{k+1} = b_k - 1$, то есть получилась арифметическая прогрессия из натуральных чисел (b_k) с первым членом $b_1 = a_2 - a_1$ и разностью $d = -1$. Свяжем a_k с этой прогрессией, для чего представим его в виде

$$a_k = (a_1) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{k-1} - a_{k-2}) + (a_k - a_{k-1})$$

(если откроем скобки, то каждое положительное число, начиная с первого, уничтожится с отрицательным числом в следующей скобке, останется только последнее положительное число a_n. Отрицательных чисел не останется, так как каждое отрицательное число, начиная с последнего, уничтожится с положительным числом в предыдущей скобке). Подставляя $a_{k+1} - a_k = b_k$ $(1 \le k \le n-1)$, получим $a_k = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{k-1}$.

По формуле суммы членов арифметической прогрессии

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{k-1} = \frac{b_1 + b_{k-1}}{2}(k-1) = \frac{b_1 + b_1 + (k-2)\cdot(-1)}{2}(k-1) = b_1(k-1) - \frac{(k-1)(k-2)}{2},$$

Поэтому $a_k = a_1 + b_1(k-1) - \frac{(k-1)(k-2)}{2}$, или

$$a_k = -\frac{1}{2}k^2 + \left(b_1 + \frac{3}{2}\right)k + (a_1 - b_1 - 1) \qquad (1)$$

а) По формуле (1) имеем $a_5 = 4b_1 + a_1 - 6 = 4(a_2 - a_1) + a_1 - 6 = 4a_2 - 3a_1 - 6 \Rightarrow 4a_2 - 3_1 - 6 = 4 \Rightarrow a_2 = \frac{3a_1 + 10}{4}$. Подберем натуральные числа a_1 и a_2.

Пусть $3a_1 + 10 = 16$, то есть $a_1 = 2$. Тогда

$$a_2 = 4,\ a_3 = 2a_2 - a_1 - 1 = 5,\ a_4 = 2a_3 - a_2 - 1 = 5.$$

Получили подходящую последовательность 2, 4, 5, 5, 4

б) Равенство (1) означает, что члены последовательности. (a_k) представляют собой значения квадратичной функции непрерывного аргумента

$$y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \left(b_1 + \frac{3}{2}\right)x + (a_1 - b_1 - 1) \qquad (2)$$

при натуральных значениях аргумента: $a_k = y(k)$, так что все точки с натуральными координатами $(k,\ a_k)$ лежат на параболе, направленной ветвями вниз. Квадратичная функция может иметь одинаковые значения $y(x_1) = y(x_2)$ не более чем при двух значениях аргумента $x_1 \neq x_2$. Значит, члены последовательности a_k и a_m могут быть равными не более чем при двух номерах $k \neq m$. Поэтому могут встречаться только пары одинаковых членов последовательности с разными номерами. Никакое натуральное число a_k не может встретиться три раза.

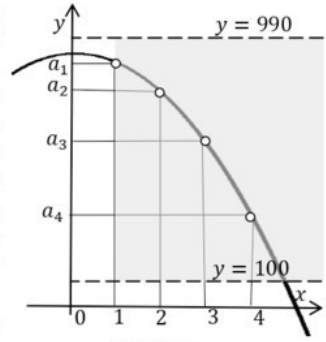


Рис.2.19

в) Надо подобрать последовательность натуральных чисел (1), удовлетворяющих неравенствам $100 \leq a_k \leq 999$, с наибольшим количеством членов n. Для этого достаточно выбрать первые два члена a_1 и a_2, то есть параметры a_1 и b_1 в формуле (1). Геометрически это означает подобрать такую параболу (2), чтобы все ее точки с координатами $(k,\ a_k)$ при $k = 1, 2, \dots, n$ оказались в полуполосе $P: x \geq 1, 100 \leq y \leq 999$ и чтобы таких точек было наибольшее количество n (рис.2.19).

Заметим, что функция (2) при всех целых значениях аргумента $x = k \in Z$ имеет целые значения. Действительно, по условию задачи a_1 , $a_2 \in N \Rightarrow b_1 = a_2 - a_1 \in Z$ и потому в выражении $y(k) = -\frac{1}{2}k^2 + \left(b_1 + \frac{3}{2}\right)k + (a_1 - b_1 - 1)$ третье слагаемое $(a_1 - b_1 - 1) \in Z$. Сумму первых двух слагаемых представим в виде

$$-k\left(\frac{k}{2} - \frac{3}{2} - b_1\right) = \frac{k(k-3-2b_1)}{2}.$$

Если $k \in Z$ четное, то после его сокращения на 2 получается

произведение целых чисел. Если k нечетное, то $k-3$ четное и потому $k-3-2b_1$ четное, так что после сокращения $k-3-2b_1$ на 2 тоже получается произведение целых чисел. Следовательно, $y(k)$ – целое число.

Множество точек $(k;\ y(k))$ с целыми координатами $k,\ y(k)$ назовем *дискретной* параболой (лат. discretus прерывистый, прерывный), а сами точки $(k;\ y(k))$ – ее *узлами*. Множество узлов $(k,\ a_k)$, представляющих последовательность $(\ a_k\ )$, является частью дискретной параболы.

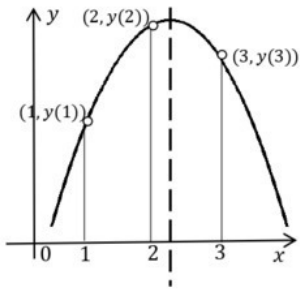


Рис.2.20

Как известно, осью симметрии параболы $y=ax^2+bx+c$ служит прямая $x=-\frac{b}{2a}$. Это значит, что если точки x_1 и x_2 расположены симметрично относительно точки $-\frac{b}{2a}$ (равноотстоят от нее), то $y(x_1)=y(x_2)$. В общем случае узлы дискретной параболы могут располагаться не симметрично относительно оси параболы из-за того, что целые точки на оси Ox располагаются не симметрично относительно точки $-\frac{b}{2a}$ (рис.2.20). Но в нашем случае $a=-\frac{1}{2}$, $b=b_1+\frac{3}{2}$, $-\frac{b}{2a}=b_1+\frac{3}{2}$, и осью симметрии является прямая $x=b_1+\frac{3}{2}$. Число $b_1+\frac{3}{2}$ находится посередине между соседними целыми числами $m=b_1+1$ и $m+1=b_1+2$ (рис.2.21). Поэтому целые числа могут располагаться симметрично относительно числа $b_1+\frac{3}{2}=m+\frac{1}{2}$. Благодаря этому узлы нашей дискретной параболы располагается симметрично относительно оси $x=m+\frac{1}{2}$.

Число $y(m+\frac{1}{2})$ является максимальным значением

функции (2). Значения функции в ближайших к $m+\frac{1}{2}$ целых точках – значения $y(m)$ и $y(m+1)$, равные друг другу в силу симметрии, являются максимальным значением функции при целых значениях аргумента.

Важно указать на разность $y(k+1)-y(k)=-\frac{1}{2}(k+1)^2+\left(b_1+\frac{3}{2}\right)(k+1)+(a_1-b_1-1)-\frac{1}{2}k^2+\left(b_1+\frac{3}{2}\right)k+(a_1-b_1-1)=b_1+1-k=m-k.$

В частности (рис.2. 21),

$$y(m+1)-y(m)=m-m=0,$$
$$y(m)-y(m-1)=m-(m-1)=1,$$
$$y(m-1)-y(m-2)=m-(m-2)=2, \quad \ldots$$

С удалением числа k от числа m величина $|m-k|$ возрастает, то есть расстояние между соседними значениями $y(k)$ и $y(k+1)$ по вертикали увеличивается. Это означает, что плотность узловых точек (их количество на единицу длины по вертикали) максимальна вблизи прямой $y=y(m)$ и уменьшается при движении вниз.

Если $m+1$ окажется натуральным числом, то $y(m+1)$ будет максимальным членом a_{m+1} последовательности (a_k) с номером $m+1$ $(m+1\geq 1)$: $y(m+1)=a_{m+1}$. А если окажется $m\in N$, то будет $y(m)=a_m$ и в последовательности окажутся два одинаковых максимальных члена $a_m=a_{m+1}$; соответствующие точки $(m;\ a_m)$ и $(m+1;\ a_{m+1})$ симметричны относительно прямой $x=m+\frac{1}{2}$.

Когда в уравнении (2) меняются параметры a_1 и b_1, парабола параллельно переносится (сохраняя форму) в новое положение (в любом положении она может быть получена параллельным переносом параболы $y(x)=-\frac{1}{2}x^2$).

Как известно, при параллельном переносе параболы $y=ax^2$ с переносом вершины $(0;0)$ в точку $(x_0;\ y_0)$ она приобретает уравнение $y-y_0=a(x-x_0)^2$. Уравнение $y=ax^2+bx+c$ можно привести к такому виду, выделив полный квадрат из членов с x:

$y = (ax^2 + bx) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right) + c =$
$a\left((x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 -$
$\frac{b^2-4ac}{4a} \Rightarrow y - \frac{4ac-b^2}{4a} = a(x - (-\frac{b}{2a}))^2.$

Следовательно, парабола $y = ax^2 + bx + c$ получается параллельным переносом параболы $y = ax^2$ с переносом вершины $(0; 0)$ в точку $(x_0; y_0) = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

В общем случае при параллельном переносе параболы $y = ax^2 + bx + c$ узловые точки могут перестать быть узловыми из-за изменения их координат. Но в нашем случае этого не произойдет. В самом деле, при любых значениях b_1 парабола

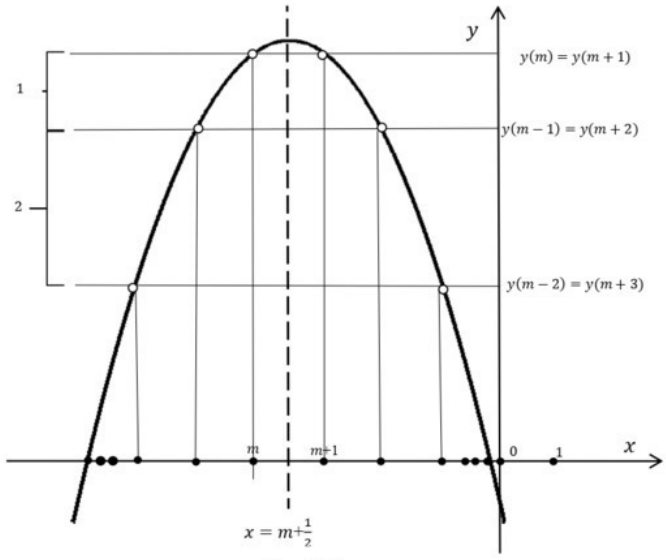


Рис.2.21

должна иметь ось $x = b_1 + \frac{3}{2}$ посередине между соседними вертикальными прямыми $x = b_1 + 1$ и $x = b_1 + 2$ с целыми значениями $b_1 + 1$ и $b_1 + 2$. Из-за этого параллельный перенос параболы влево или вправо возможен только на целое число единиц. Следовательно, абсциссы узловых точек могут измениться только на целое число единиц и потому остаются целыми. Ординаты тоже останутся целыми, ведь мы доказали, что функция (2) при целых значениях аргумента имеет целые значения.

Итак, при любом параллельном перемещении параболы ее узлы остаются на своих местах, меняя только координаты. Пользуясь этим, расположим параболу наиболее выгодным образом. Чтобы в полуполосе P было максимальное количество узлов, надо поместить в эту полуполосу кусок параболы с наибольшей плотностью узловых точек. В качестве такого куска возьмем кусок левой половины дискретной параболы с верхней точкой $(m; y(m)) = (m; 999)$. Так как $y(m+1) = y(m)$, то и симметричная правая часть параболы окажется в полуполосе P. Тогда $a_m = a_{m+1} = 999$ будут максимальными членами последовательности, которая будет содержать $n = 2m$ членов. Учитывая условие $a_1 \geq 100$, найдем максимально возможное значение m.

Согласно формуле (1) с учетом равенства $b_1 = m - 1$ получаем

$$999 = -\frac{1}{2}m^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)m + (a_1 - m) = \frac{1}{2}m^2 + a_1 - \frac{1}{2}m \Rightarrow$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m + 999.$$

Условие $a_1 \geq 100$ дает неравенство $-\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m + 899 \geq 0$. Оно выполняется при $m \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 1798})$. Учитывая, что $42{,}90 < \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 1798}\right) < 42{,}91$, получаем $m \leq 42$, то есть в возрастающей части может быть до 42 членов последовательности.

Значит, максимально возможное число членов последовательности $n = 84$. Нами уже фактически построена подходящая последовательность с $n = 84$ членами, так как параметры a_1 и b_1 формулы (1) можем теперь указать:

$$b_1 = m - 1 = 42 - 1 = 41, a_1 = -\frac{1}{2} \cdot 42^2 + \frac{1}{2} \cdot 42 + 999 = 138.$$

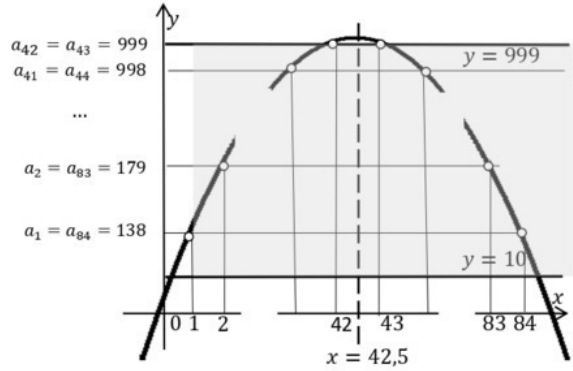


Рис.2.22

Наша последовательность задается формулой

$$a_k = -\frac{1}{2}k^2 + \left(41 + \frac{3}{2}\right)k + (138 - 41 - 1) = -\frac{1}{2}k^2 + 42{,}5k + 96.$$

Рис.2.22 иллюстрирует построенную последовательность.

Ответ: а) Например, 2, 4, 5, 5, 4. б) Нет. в) При $n = 84$.

Вариант 32

Пусть q – наименьшее общее кратное, d – наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $7x = 16y - 73$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 204?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

Решение.

По свойству наибольшего общего делителя существуют взаимно простые натуральные числа u и v такие, что $x = d \cdot u, y = d \cdot v$. Наименьшее общее кратное можно получить, добавив к разложению числа x на простые множители недостающие простые множители из разложения числа y. Недостающие множители содержатся в v, так как u и v не имеют общих простых множителей (отличных от 1). Поэтому $q = d \cdot u \cdot v$. Отсюда $\frac{q}{d} = uv$. Подставим x и y в равенство $7x = 16y - 73$:

$$(16v - 7u)d = 73.$$

Так как число 73 – простое, то это возможно только в двух случаях: $d = 1$ и $d = 73$.

При $d = 1$ имеем $16v - 7u = 73 \Rightarrow$

$$v = \frac{73+7u}{16}. \qquad (1)$$

При $d = 73$ имеем $16v - 7u = 1 \Rightarrow$

$$v = \frac{1+7u}{16}. \qquad (2)$$

а) Пусть $\frac{q}{d} = 204$. Если $d = 1$, то (1) $\Rightarrow 204 = uv = \frac{73u+7u^2}{16}$. Получаем квадратное уравнение

$$7u^2 + 73u - 3264 = 0,$$

имеющее один натуральный корень $u = 17$. Тогда $v = \frac{73+7\cdot 17}{16} = 12$. $x = 1 \cdot 17 = 17$,

$y = 1 \cdot 12 = 12$, $7 \cdot 17 = 16 \cdot 12 - 73$, $q = 204, d = 1$, $\frac{q}{d} = 204$.

Случай $d = 73$ можно не рассматривать, ответ уже получен: может, например при $x = 17$, $y = 12$.

б) Пусть $\frac{q}{d} = 2$. Если $d = 1$, то (1) $\Rightarrow 2 = uv = \frac{73u+7u^2}{16}$. Получаем квадратное уравнение $7u^2 + 73u - 32 = 0$, не имеющее целых корней. Если $d = 73$, то (2) $\Rightarrow 2 = uv = \frac{u+7u^2}{16}$. Получаем квадратное уравнение $7u^2 + u - 32 = 0$, не имеющее целых корней. Ответ: не может.

в) Пусть $d = 1$. Тогда $\frac{q}{d} = \frac{73u+7u^2}{16}$.

Графиком квадратичной функции непрерывного аргумента $z = \frac{73u+7u^2}{16}$ является парабола, направленная ветвями вверх и пересекающая ось Ou в точках $u = -\frac{73}{7}$ и $u = 0$ (рис.2.23). При $u \geq 1$ функция возрастает. Поэтому среди значений $z(1)$, $z(2)$, $z(3)$, ... наименьшим является $z(1) = 5$.

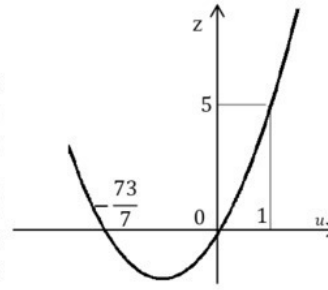


Рис.2.23

Пусть $d = 73$. Тогда $\frac{q}{d} = \frac{u+7u^2}{16}$. Как и в предыдущем случае, функция $z = \frac{u+7u^2}{16}$ при $u \geq 1$ возрастает. Простым перебором нескольких значений u убедимся, что в этом случае $\frac{q}{d}$ не может быть меньше 5. В самом деле, $z(1) = \frac{1}{2}$, $z(2) = 1\frac{7}{8}$, $z(3) = 4\frac{1}{8}$, $z(4) = 7\frac{1}{4}$ – не целые числа (а $\frac{q}{d} = uv$ – целое). Дальше $z(n)$ больше $7\frac{1}{4}$.

Итак, наименьшее значение $\frac{q}{d} = 5$ при $u = 1$. При этом $v = \frac{73+7\cdot 1}{16} = 5$, $x = 1 \cdot 1 = 1$, $y = 1 \cdot 5 = 5$, $7 \cdot 1 = 16 \cdot 5 - 73$, $q = 5$, $d = 1$, $\frac{q}{d} = 5$.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) 5.

Вариант 33

Красный карандаш стоит 18 рублей, синий — 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на шесть.

а) Можно ли купить 30 карандашей?

б) Можно ли купить 33 карандаша?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

Решение.

Пусть s – число купленных синих карандашей, k – число купленных красных карандашей. Тогда $\begin{cases}14s+18k\le 499\\ |s-k|\le 6\end{cases}$, или

$$\begin{cases}14s+18k\le 499\\ -6\le s-k\le 6\end{cases}. \qquad (1)$$

а) Если $s+k=30$, то (1) $\Rightarrow -6\le 30-2k\le 6 \Leftrightarrow 12\le k\le 18$. Возьмем $k=12$. Тогда $s=18$. $18-12=6$, $18\cdot 12+14\cdot 18=568<499$. Ответ: можно.

б) Дешевле всего 33 карандаша будут стоить, если купить наибольшее возможное число синих карандашей и наименьшее возможное число красных. Хотелось бы по максимуму $s=k+6$, но система $\begin{cases}s+k=33\\ s=k+6\end{cases}$ не имеет целочисленного решения. Подходит $s=k+5$. В этом случае $s=19$, $k=14$. Значит наименьшая возможная стоимость покупки 18 14+ 14·19= 518 (руб.), и не хватит денег. Ответ: 33 карандаша нельзя купить.

в) Обозначим через n общее число купленных карандашей. Оценим значение n сверху: используя условие (1), перейдем к неравенству вида $n\le m$, где m – число, которое – будем надеяться – окажется наибольшим возможным числом купленных карандашей.

$$(1)\Rightarrow\begin{cases}14s+18k\le 499\\ -6\le s-k\le 6\\ n=s+k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}14s+18k\le 499\\ -6\le s-k\le 6\\ s=n-k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}14n+4k\le 499\\ -6\le n-2k\le 6\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}k\le\frac{499-14n}{4}\\ \frac{n-6}{2}\le k\le\frac{n+6}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{n-6}{2}\le\frac{499-14n}{4}\Rightarrow n\le 31\frac{15}{16}.$$

Так как $n\in Z$, то $n\le 31$.

Покажем, что n действительно принимает наибольшее значение $m=31$. Подберем s и k. Конечно, s должно быть максимальным. Вариант $s=k+6$ не проходит: система $\begin{cases}s+k=31\\ s=k+6\end{cases}$ не имеет целочисленного решения. Подходит

$s = k + 5$. В этом случае $s = 18$, $k = 13$. $18 - 13 < 6$, $18\ 13 + 14 \cdot 18 = 486 < 499$.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) 31.

Вариант 34

В результате опроса выяснилось, что примерно 58% опрошенных предпочитают искусственную ёлку натуральной (число 58 получено с помощью округления до целого числа). Из этого же опроса последовало, что примерно 42% респондентов никогда не отмечали Новый год не дома.

а) Могло ли в опросе участвовать ровно 40 человек?

б) Могло ли в опросе участвовать ровно 48 человек?

в) Какое наименьшее количество человек могло участвовать в этом опросе?

Решение. При округлении числа до целого все цифры после запятой отбрасывают, если первая из них меньше 5. Если же отброшенная часть начинается с цифры, равной или больше 5, то число увеличивают на 1.

а) Пусть в опросе принимало участие n человек, из них x предпочитают искусственную ёлку натуральной, y никогда не отмечали Новый год не дома. Тогда согласно правилу округления

$$\begin{cases} 57{,}5 \le \frac{x}{40} 100 \le 58{,}4 \\ 41{,}5 \le \frac{y}{40} 100 \le 42{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 23 \le x \le 23{,}36 \\ 16{,}6 \le y \le 16{,}96 \end{cases}.$$

Второе неравенство не имеет целого решения. Ответ: нет.

б) Имеем

$$\begin{cases} 57{,}5 \le \frac{x}{48} 100 \le 58{,}4 \\ 41{,}5 \le \frac{y}{48} 100 \le 42{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27{,}6 \le x \le 28{,}032 \\ 19{,}92 \le y \le 20{,}3526 \end{cases}.$$

Имеется решение в целых числах $x = 28, y = 20$. При этом $\frac{28}{48} \cdot 100 = 58{,}33 \ldots \approx 58$, $\frac{20}{48} 100 = 41{,}66 \ldots \approx 42$. Ответ: да.

в) Имеем

$$\begin{cases} 57{,}5 \le \frac{x}{n} 100 \le 58{,}4 \\ 41{,}5 \le \frac{y}{n} 100 \le 42{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}575n \le x \le 0{,}584n \\ 0{,}415n \le y \le 0{,}424n \end{cases}.$$

Необходимо найти минимальное значение n, при котором эта система неравенств имеет целочисленные решения. Заметим, что отрезки $[0{,}575n, 0{,}584n]$, $[0{,}415n, 0{,}424n]$, куда должны попадать целые числа x и y соответственно, имеют длину $0{,}009n \ge 1$ при $n \ge 12$ (при натуральном n неравенства $n \ge \frac{1}{0{,}009}$ и $n \ge 12$ равносильны). Значит, при всех $n \ge 12$ система имеет целочисленные решения. Остается проверить значения n от 1 до 11.

$n = 1$: $\begin{cases} 0{,}575 \le x \le 0{,}584 \\ 0{,}415 \le y \le 0{,}424 \end{cases}$ нет решений. $n = 2$: $\begin{cases} 1{,}15 \le x \le 1{,}168 \\ 0{,}83 \le y \le 0{,}548 \end{cases}$ нет решений, и т.д., $n = 11$: $\begin{cases} 6{,}325 \le x \le 6{,}424 \\ 4{,}565 \le y \le 4{,}664 \end{cases}$ нет решений,

$n = 12$: $\begin{cases} 6{,}9 \le x \le 7{,}008 \\ 4{,}98 \le y \le 5{,}088 \end{cases}$ имеется решение в целых числах $x = 7, y = 5$. При этом $\frac{7}{12} 100 = 58{,}33\ldots \approx 58$, $\frac{5}{12} 100 = 41{,}66\ldots \approx 42$.

Наименьшее количество человек 12.

Ответ: а) Нет. б) Да. в) 12.

Вариант 35

Известно, что a, b, c и d – попарно различные *положительные* двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{7}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 6d$?

Примечание. В сборнике нет слова «положительные», оно должно быть добавлено, потому что подразумевается. Без этого слова ответ б) неправильный: если взять, например, $a = -19, b = 10, c = 16, d = 20$, то равенство $\frac{a+c}{b+d} 11 = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ выполняется.

Решение.

а) Может, например, $\frac{7}{19}=\frac{7\cdot5}{19\cdot5}=\frac{7(2+3)}{19(1+4)}=\frac{14+21}{19+76}$,

$$a=14, b=19, c=21, d=76.$$

б) Предположим, что $\frac{a+c}{b+d}\cdot 11=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$. Тогда, приведя к общему знаменателю, приравняв числители и приведя подобные члены, получим

$10abd+10bcd=b^2c+ad^2 \quad\Leftrightarrow\quad 10abd-ad^2=b^2c-10bcd \quad\Leftrightarrow$

$ad(10b-d)=bc(b-10d)$.

По условию $10\le a,b,c,d\le 99$. Поэтому $10b-d\ge 10\cdot 10-99>0$, $b-10d\le 99-10\cdot 10<0$, так что левая и правая части последнего равенства имеют противоположные знаки, что невозможно. Ответ: не может.

в) Используя условия $a>3b$ и $c>6d$, постараемся получить неравенство вида

$$\frac{a+c}{b+d}\ge f(d),$$

где $f(d)$ – некоторое выражение, содержащее кроме чисел только одну букву d. После этого, пользуясь ограничением $d\ge 10$, придем к неравенству $\frac{a+c}{b+d}\ge m$, где m – некоторое число, которое, будем надеяться, окажется наименьшим значением дроби $\frac{a+c}{b+d}$.

Так как данные числа целые, то неравенства $a>3b$ и $c>6d$ равносильны соответственно неравенствам

$$a\ge 3b+1 \ \text{ и } \ c\ge 6d+1. \qquad (1)$$

Из первого неравенства имеем $3b+1\le a\Rightarrow 3b+1\le 99\Rightarrow b\le\frac{98}{3}$, а это равносильно неравенству

$$b\le 32. \qquad (2)$$

Используем неравенства (1):

$$\frac{a+c}{b+d}\ge\frac{3b+1+6d+1}{b+d}=\frac{3b+6d+2}{b+d}.$$

Для использования неравенства (2) разобьем дробь на два слагаемых так, чтобы первое не содержало b, а второе содержало его только в знаменателе:

$$\frac{3b+6d+2}{b+d}=\frac{3b+3d+3d+2}{b+d}=3+\frac{3d+2}{b+d}.$$

Теперь используем неравенство (2): $3+\frac{3d+2}{b+d} \geq 3+\frac{3d+2}{32+d}$. Получилось неравенство $\frac{a+c}{b+d} \geq f(d)$, где $f(d)=3+\frac{3d+2}{32+d}$. При $x \geq 10$ функция непрерывного аргумента $f(x)=3+\frac{3x+2}{32+x}$ возрастает, поскольку ее производная $f'(x)=\frac{94}{(32+x)^2}>0$. Поэтому

$d \geq 10 \Rightarrow f(d) \geq f(10)=\frac{79}{21}$ (нашлось число $m=\frac{79}{21}$). Итак, $\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{79}{21}$.

Наименьшее значение $\frac{79}{21}$ дробь $\frac{a+c}{b+d}$ действительно принимает: можно подобрать числа a, b, c и d. По ходу решения использовали неравенства $b \leq 32$ и $d \geq 10$, поэтому возьмем $b=32, d=10$. Нужно выполнение равенства $\frac{a+c}{b+d}=\frac{79}{21}$, то есть равенства $\frac{a+c}{32+10}=\frac{79}{21} \Leftrightarrow a+c=158$. Выбираем $a \geq 3b+1$, то есть $a \geq 97$ и $c \geq 6d+1$, то есть $c \geq 61$. Как раз подходят $a=97$ и $c=61$ (в сумме дают 158). При выбранных значениях a, b, c и d получаем $\frac{a+c}{b+d}=\frac{97+61}{32+10}=\frac{79}{21}$.

Итак, дробь $\frac{a+c}{b+d}$ принимает наименьшее значение $\frac{79}{21}$ при

$$a=97, b=32, c=61, d=10.$$

Ответ: а) Да, например, если $a=14, b=19, c=21, d=76$. б) Нет. в) $\frac{79}{21}$.

Вариант 36

а) Приведите пример такого натурального числа n, что числа n^2 и $(n+16)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 200.

б) Сколько существует трёхзначных чисел n с указанным в пункте а) свойством?

в) Сколько существует двузначных чисел m, для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел n, таких, что n^2 и $(n+m)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 200.

Примечание. По умолчанию предполагается, что и в пунктах б) и в) речь идет тоже о натуральных числах.

Решение.

Отметим сначала, что двузначное число m и трехзначное число n характеризуются соответственно неравенствами $10 \le m \le 99$ и $100 \le n \le 999$.

Еще используем известную теорему о делении с остатком:

Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом единственным способом, разделить a на b с остатком: найти такие два целых числа q (частное) и r (остаток), что $a = bq + r,\ 0 \le r < |b|$.

Из этой теоремы следует утверждение:

Два целых числа a' и a'' имеют одинаковые остатки при делении на натуральное число b тогда и только тогда, когда разность этих чисел нацело делится на b $(a' - a'' \vdots b)$.

(Доказательство. Сначала вспомним, что если $a, b, c \in Z$, $a \vdots c,\ b \vdots c$, то $a + b \vdots c$. Отсюда следует, что если сумма $S = (a + b) \vdots c$ и одно из слагаемых $a \vdots c$, то и второе слагаемое $b \vdots c$. Это потому, что в сумме $b = S + (-a)$ оба слагаемых нацело делятся на c. Пусть $a' = bq' + r', 0 \le r' < b,\ a'' = bq'' + r'', 0 \le r'' < b$. Если $r' = r''$, то $a' - a'' = b(q' - q'')$, то есть $a' - a'' \vdots b$. Обратно, если $a' - a'' \vdots b$, то $b(q' - q'') + (r' - r'') \vdots b$, поэтому и $r' - r'' \vdots b$. Но
$$-b < r' - r'' < b,$$
а на промежутке $(-b, b)$ только одно число 0 делится на b нацело. Значит, $r' - r'' = 0 \Rightarrow r' = r''$).

Поэтому условие «$(n + m)^2$ и n^2 дают одинаковый остаток при делении на 200» можно записать в виде

$$\left((n + m)^2 - n^2\right) \vdots 200 \Leftrightarrow \frac{2mn + m^2}{200} \in Z. \qquad (1)$$

а) При $m = 16$ имеем (1) $\Rightarrow \frac{32n + 256}{200} \in Z$, или $\frac{4(n+8)}{25} \in Z$. Это условие выполнено, например, если $n + 8 = 25$, то есть $n = 17$ $((17 + 16)^2 - 17^2 = 800 \vdots 200)$.

б) Из условия $\frac{4(n+8)}{25} \in Z$ следует, что $n + 8 \vdots 25$ (так как 4 не $\vdots$ 25). Значит, $n + 8 = 25k$ при некотором $k \in N$, и отсюда $n = 25k - 8$. Так как $100 \le n \le 999$, то $100 \le 25k - 8 \le 999 \Leftrightarrow \frac{108}{25} \le k \le \frac{1007}{25}$. Для $k \in N$ имеем равносильные неравенства

$5 \le k \le 40$. Таких значений k всего 36, так что имеется 36 трехзначных чисел с указанным свойством.

в) (1) $\Rightarrow \frac{2mn+m^2}{200} \in Z$. Значит, m – четное число (иначе сумма четного числа $2mn$ и нечетного числа m^2 была бы нечетным числом) и потому $m = 2k$ при некотором $k \in N$. Так как $10 \le m \le 99$ и m четное, то $10 \le m \le 98$. Следовательно, $5 \le k \le 49$.

Условие $\frac{2mn+m^2}{200} \in Z$ перепишем теперь в виде $\frac{4kn+4k^2}{200} = \frac{k(n+k)}{2 \cdot 25} \in Z$ и рассмотрим все возможные варианты для k, при которых оно выполняется.

$\underline{k = 25.}$ Тогда $\frac{n+25}{2} \in Z$ при любом нечетном трехзначном числе n ($n + 25$ будет четным). Таких трехзначных чисел много больше чем 36, а нам нужно ровно 36. Вариант отпадает.

$\underline{k \ne 25,\ \text{но}\ k \vdots 5.}$ Тогда и $n + k \vdots 5$ (иначе $k(n + k)$ не $\vdots 25$), а отсюда следует, что и $n \vdots 5$.

Если k четное, то $\frac{k(n+k)}{2 \cdot 25} \in Z$ при любом трехзначном числе n, кратном 5, а таких много больше, чем 36. Если k нечетное, то $n + k$ четное, а значит n нечетное, и $\frac{k(n+k)}{2 \cdot 25} \in Z$ при любом нечетном трехзначном числе n, кратном 5, а таких тоже больше, чем 36. Вариант отпадает.

$\underline{k \text{ не} \vdots 5,\ k \text{ нечетное}}$. Тогда $\frac{k(n+k)}{2 \cdot 25} \in Z$ при любом $n + k$, кратном 50. С учетом условий $100 \le n \le 999$ и $5 \le k \le 49$ имеем $105 \le n + k \le 1048$, а для чисел $n + k$, кратных 50, имеем границы $150 \le n + k \le 1000$. В этих границах содержатся кратные 50 числа $3 \cdot 50, 4 \cdot 50, 5 \cdot 50, \dots, 20 \cdot 50$ – всего $20 - 2 = 18$ таких чисел, а нам нужно 36. Вариант отпадает.

$\underline{k \text{ не} \vdots 5,\ k \text{ четное}}$. Тогда $\frac{k(n+k)}{2 \cdot 25} \in Z$ при любом $n + k$, кратном 25. В этом случае (k четное) имеем неравенства $6 \le k \le 48$, $100 \le n \le 999$.

При $k = 6$ для всех чисел $n + k$ имеем границы $106 \le n + k \le 1005$, а для чисел $n + k$, кратных 25 – границы

$$125 \le n + k \le 1000 \qquad (2)$$

В этих границах содержатся числа $5 \cdot 25$, $6 \cdot 25$, $7 \cdot 25$, ... , $40 \cdot 25$ – всего $40 - 4 = 36$ различных чисел $n + k$, кратных 25. Они сделаны из 36 различных чисел n добавлением числа $k = 6$. Это значит, что для двузначного числа $m = 2k = 12$ существует ровно 36 трёхзначных чисел n, удовлетворяющих условию задачи.

В силу кратности 25 границы (2) для чисел $n + k$, кратных 25, будут сохраняться для всех $k \in [6, 24]$. Например, при $k = 24$ для всех чисел $n + k$ имеем $124 \le n + k \le 1023$, а для чисел $n + k$, кратных 25 – тоже $125 \le n + k \le 1000$.

При остальных $k \in [26, 48]$ для чисел $n + k$, кратных 25, имеем границы $150 \le n + k \le 1025$ (например, при $k = 40$: для чисел $n + k$ имеем границы $140 \le n + k \le 1039$, а значит для чисел $n + k$, кратных 25, оказываются границы $150 \le n + k \le 1025$). В этих границах содержится тоже 36 чисел, кратных 25 (от $6 \cdot 25$ до $41 \cdot 25$).

Итак, все возможные варианты рассмотрены; для каждого четного числа $k \in [6, 48]$, не кратного 5, имеется ровно 36 трехзначных чисел n таких, что числа n и $m = 2k$ удовлетворяют условию задачи: n^2 и $(n + m)^2$ при делении на 200 имеют одинаковые остатки.

По таблице 2.24 подсчитаем количество чисел m.

k	6	8	12	14	16	18	22	24	26	28	32	34	36	38	42	44	46	48
m	12	16	24	28	32	36	44	48	52	56	64	68	72	76	84	88	92	96

Табл.2.24

Всего 18 значений m.

Ответ: а) 17. б) 36. в) 18.

Вариант 37

Даны пять различных натуральных чисел. Известно, что их произведение равно 792.

а) Могут ли все пять чисел образовывать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли четыре числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

в) Могут ли три числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

Решение.

Рассмотрим сначала в общем виде геометрическую прогрессию из k членов:

$$b,\ bq,\ bq^2,\ \dots,\ bq^{k-1}.$$

По условию $b \in N$ (может быть $b = 1$), q – положительное рациональное число (это отношение следующего члена прогрессии к предыдущему и потому может не быть натуральным числом),

$q \neq 1$, так как даны различные числа. Рассмотрим отдельно два случая: q – целое и q – нецелое.

1) q – целое. Произведение всех членов прогрессии

$$P = b^k q^{1+2+\cdots+(k-1)}.$$

По формуле суммы членов арифметической прогрессии ($S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$, у нас $n = k-1$, $a_1 = 1$, $a_n = k-1$) находим $1 + 2 + \cdots + +(k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$, поэтому

$$P = b^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}.$$

В этом случае $q \in N$, причем $q \geq 2$, так как $q \neq 1$. Как и любое отличное от 1 натуральное число, q разлагается на произведение простых множителей. Значит, в составе произведения P имеется хотя бы одно простое число в степени $\frac{k(k-1)}{2}$ ($\frac{k(k-1)}{2} \in N$ как сумма натуральных чисел).

2) q – не целое. Рациональное число q представимо в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где $m, n \in N$, поэтому прогрессия запишется в виде

$$b,\quad b\frac{m}{n},\quad b\frac{m^2}{n^2},\quad \dots,\quad b\frac{m^{k-1}}{n^{k-1}}.$$

По условию все эти числа натуральные, в частности, последнее тоже: $b\frac{m^{k-1}}{n^{k-1}} \in N$. Значит, bm^{k-1} нацело делится на n^{k-1}. Множитель m^{k-1} на него делиться не может, так как не имеет с ним общих множителей, отличных от 1 (ввиду того, что m и n взаимно простые). Поэтому множитель b делится на него: $b = n^{k-1} \cdot a$, где a – какое-то натуральное число. Теперь прогрессия запишется в виде

$$n^{k-1} \cdot a,\ n^{k-1} \cdot a\frac{m}{n},\ n^{k-1} \cdot a\frac{m^2}{n^2},\ \dots,\ n^{k-1} \cdot a\frac{m^{k-1}}{n^{k-1}},\ \text{или}$$
$$an^{k-1},\ an^{k-2}m,\ an^{k-3}m^2,\ \dots,\ an^2m^{k-3},\ anm^{k-2},\ am^{k-1}.$$

Подсчитаем произведение P:

$$P = a^k n^{(k-1)+(k-2)+\dots+2+1} m^{1+2+\dots+(k-2)+(k-1)} = a^k n^{\frac{k(k-1)}{2}} m^{\frac{k(k-1)}{2}}.$$

Поскольку число $\frac{m}{n}$ не целое, то $n \neq 1$ и поэтому $n \geq 2$. Значит, n разлагается на произведение простых множителей, и потому в составе произведения P имеется хотя бы одно простое число в степени $\frac{k(k-1)}{2}$.

Итак, в любом случае в составе произведения P имеется хотя бы одно простое число в степени $\frac{k(k-1)}{2}$.

Произведение членов прогрессии P должно входить в состав произведения всех данных чисел 792, следовательно, число 792 должно иметь хотя бы один простой делитель в степени $\frac{k(k-1)}{2}$.

Из разложения $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$ видим, что может быть только $\frac{k(k-1)}{2} = 1, 2$ или 3, так что $\frac{k(k-1)}{2} \leq 3$. Решим это неравенство: $\frac{k(k-1)}{2} \leq 3 \Leftrightarrow k^2 - k - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq k \leq 3$. Так как $k \in N$, то $k \leq 3$.

Теперь можем дать ответы к задаче. Три числа из пяти данных чисел ($k = 3$) могут образовать геометрическую прогрессию. Например, из 2^3 извлечем геометрическую прогрессию: 1, 2, 4. Тогда, как вариант, 5 чисел будут

1, 2, 4, 9, 11.

Четыре числа из пяти или все пять чисел не могут образовать геометрическую прогрессию.

Ответ: а) Нет. б) Нет. в) Могут, например, 1, 2, 4, 9, 11.

Вариант 38

Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел $-1,\ 2,\ 4,\ -6,\ 7,\ -8,\ -10,\ 12$. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $-1,\ 2,\ 4,\ -6,\ 7,\ -8,\ -10,\ 12$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение.

Пусть

$$a_1 = -1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = -6,$$
$$a_5 = 7,\ a_6 = -8,\ a_7 = -10,\ a_8 = -12,$$

$b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_8$ – числа, записанные на обратных сторонах 1-й, 2-й, ..., 8-й карточек соответственно. Тогда имеем результат

$$P = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\cdots(a_8 + b_8).$$

а) Среди данных чисел нет противоположных, поэтому все скобки отличны от нуля. Значит, $P \neq 0$.

б) 1 – нечетное число. Посмотрим, может ли P быть нечетным числом. Если P нечетное число, то все скобки должны быть нечетными (если хотя бы одна скобка – четное число, то все произведение P – четное число). Для этого в каждой паре $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_8, b_8)$ одно из чисел должно быть четным (неважно – первое или второе), а другое – нечетным (чтобы их сумма была нечетным числом). А для этого во всем наборе из 16 чисел $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_8,\ b_1,\ b_2, \dots,\ b_8$ должно быть 8 четных и 8 нечетных чисел. Но в нашем наборе

12 четных чисел и 4 нечетных. Значит, P не может быть нечетным числом и потому не может равняться 1.

в) Из пунктов а) и б) следует, что искомое наименьшее целое неотрицательное число P отлично от нуля и четно – это четное натуральное число. Среди 8 данных чисел 6 четных и два нечетных. Наименьшее количество карточек с четной суммой будет, если оба нечетных числа -1 и 7 участвуют в парах только с четными числами. Таких карточек с нечетной суммой будет 4. Остальные 4 карточки будут с четными суммами и потому произведение P будет кратно по крайней мере числу $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

a_k	-1	2	4	-6	7	-8	-10	12
b_k	2	-1	-6	4	-8	7	12	-10
$a_k + b_k$	1	1	-2	-2	-1	-1	2	2

Табл.2.25

Наименьшим натуральным числом, кратным 16, является само число 16. Значение $P = 16$ получится, если составим две карточки с одинаковой суммой 1, две карточки с одинаковой суммой -1, две карточки с одинаковой суммой 2 и две карточки с одинаковой суммой -2 (табл.2.25)

Ответ: а) Нет. б) Нет. в) 16.

Вариант 39

Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$. Так как прогрессия возрастает, то ее разность $d \geq 1$. Пусть $S_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ – первоначальная сумма прогрессии, $S_2 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$ – новая сумма. Тогда первоначально вычисленная разность равна

$$S_1^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2),$$

а вновь вычисленная равна

$$S_2^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2).$$

Нас интересует разница этих разностей

$$R = S_2^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2) - \big(S_1^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\big) =$$

$$S_2^2 - S_1^2 - a_{n+1}^2 = (S_2 - S_1)(S_2 + S_1) - a_{n+1}^2 =$$

$$a_{n+1}(2S_1 + a_{n+1}) - a_{n+1}^2 = \quad 2S_1 a_{n+1} = 2\frac{a_1 + a_n}{2} n a_{n+1} =$$

$$(a_1 + (a_1 + (n-1)d)n(a_1 + nd) = (2a_1 + (n-1)d)(a_1 + nd)n \Rightarrow$$

$$R = (2a_1 + (n-1)d)(a_1 + nd)n. \qquad (1)$$

а) Попробуем $a_1 = 1,\ d = 1$. Тогда (1) $\Rightarrow$ $40 = \big(2 + (n-1)\big)(1+n)n \Leftrightarrow (n+1)^2 n = 40$. Натуральное число n не подбирается (при $n = 1$ и $n = 2$ получается соответственно 4 и 18, а при $n \geq 3$ – больше 40). Возьмем $a_1 = 2,\ d = 1$. Тогда (1) $\Rightarrow$ $40 = \big(4 + (n-1)\big)(2+n)n \Leftrightarrow (n+3)(n+2)n = 40$. Подходит значение $n = 2$. Получаем прогрессию 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов равна $25 - 13 = 12$. Если добавить число 4, то разность будет равна $81 - 29 = 52$, что ровно на 40 больше, чем было.

б) (1) $\Rightarrow$ $1768 = (2a_1 + (n-1)d)(a_1 + nd)n$. По условию $a_1 \geq 0, d \geq 1$, поэтому $1768 \geq (2 \cdot 0 + (n-1) \cdot 1)(0 + n \cdot 1)n =$

$(n-1)n^2 \Rightarrow 1768 \geq (n-1)n^2$. Если $n = 13$, то приходим к противоречию: $1768 \geq 2028$. Значит, 13 членов в начальной прогрессии быть не может. С возрастанием n правая часть неравенства возрастает, поэтому тем более не может быть больше 13 членов.

в) Как видно из предыдущего пункта, наибольшее количество членов первоначальной прогрессии n не может быть больше 12. Проверим по порядку значения $n = 12, 11, 10, \ldots$ и дойдем до интересующего нас наибольшего значения n. Пользуемся равенством (1):

$$1768 = (2a_1 + (n-1)d)(a_1 + nd)n.$$

Так как $a_1 \geq 0, d \geq 1$ $n > 1$, то число 1768 представлено как произведение трех натуральных чисел, и n является делителем числа 1768.

$n = 12, 11, 10, 9$ не являются делителями числа 1768 и потому отпадают.

$n = 8 \Rightarrow 221 = (2a_1 + 7d)(a_1 + 8d)$. Если раскрыть справа скобки, то будем иметь $56d^2$ + еще неотрицательные слагаемые. Поэтому $56d^2 \leq 221 \Rightarrow d^2 \leq \frac{221}{56}$. Так как $\frac{221}{56} < 4$, то $d < 2$. Но по условию $d \geq 1$, так что $d = 1$. Поэтому

$$221 = (2a_1 + 7)(a_1 + 8) \Leftrightarrow 2a_1^2 + 23a_1 - 165 = 0.$$

Это уравнение имеет единственный целый неотрицательный корень $a_1 = 5$. $n = 8$ подходит.

В первоначальной прогрессии наибольшее количество членов могло быть 8. Прогрессия из 8 членов 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 2, 3. б) Нет. в) 8.

Вариант 40

Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова

вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$. Так как прогрессия возрастает, то ее разность $d \geq 1$. Пусть $S_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ – первоначальная сумма прогрессии, $S_2 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$ – новая сумма. Тогда первоначально вычисленная разность равна

$$S_1^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2),$$

а вновь вычисленная равна

$$S_2^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2).$$

Нас интересует разница этих разностей

$$R = S_2^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2) - \left(S_1^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\right) =$$

$$S_2^2 - S_1^2 - a_{n+1}^2 = (S_2 - S_1)(S_2 + S_1) - a_{n+1}^2 =$$

$$a_{n+1}(2S_1 + a_{n+1}) - a_{n+1}^2 = 2S_1 a_{n+1} = 2\frac{a_1 + a_n}{2} n a_{n+1} =$$

$$(a_1 + (a_1 + (n-1)d)n(a_1 + nd) = (2a_1 + (n-1)d)(a_1 + nd)n \Rightarrow$$

$$R = (2a_1 + (n-1)d)(a_1 + nd)n. \qquad (1)$$

а) Попробуем $a_1 = 1$, $d = 1$. Тогда

(1) $\Rightarrow$ $48 = \big(2 + (n-1)\big)(1+n)n \Leftrightarrow (n+1)^2 n = 48$. Подходит значение $n = 3$. Получаем прогрессию 1, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов равна $36 - 14 = 22$. Если добавить число 4, то разность будет равна $100 - 30 = 70$, что ровно на 48 больше, чем было.

б) (1) $\Rightarrow$ $1440 = (2a_1 + (n-1)d)(a_1 + nd)n$. По условию $a_1 \geq 0, d \geq 1$, поэтому $1440 \geq (2 \cdot 0 + (n-1) \cdot 1)(0 + n \cdot 1)n = (n-1)n^2$ $\Rightarrow$ $1440 \geq (n-1)n^2$. Если $n = 12$, то приходим к противоречию: $1440 \geq 1584$. Значит, 12 членов в начальной

прогрессии быть не может. С возрастанием n правая часть неравенства возрастает, поэтому тем более не может быть больше 12 членов.

в) Как видно из предыдущего пункта, наибольшее количество членов первоначальной прогрессии n не может быть больше 11. Проверим по порядку значения $n = 11, 10, 9, \ldots$ и дойдем до интересующего нас наибольшего значения n. Пользуемся равенством (1):

$$1440 = (2a_1 + (n-1)d)(a_1 + nd)n.$$

Так как $a_1 \geq 0, d \geq 1$ $n > 1$, то число 1440 представлено как произведение трех натуральных чисел, и n является делителем числа 1440.

$n = 11$ не является делителем числа 1440 и потому отпадает.

$n = 10 \Rightarrow 144 = (2a_1 + 9d)(a_1 + 10d)$.

Если раскрыть справа скобки, то будем иметь $90d^2 +$ еще неотрицательные слагаемые. Поэтому $90d^2 \leq 144 \Rightarrow d^2 \leq \frac{16}{10}$. Так как $\frac{16}{10} < 4$, то $d < 2$. Но по условию $d \geq 1$, так что $d = 1$. Поэтому $144 = (2a_1 + 9)(a_1 + 10) \Leftrightarrow 2a_1^2 + 29a_1 - 54 = 0$. Это уравнение для a_1 не имеет целых корней, так что $n = 10$ отпадает.

$n = 9 \Rightarrow 160 = (2a_1 + 8d)(a_1 + 9d)$.

Имеем $72d^2 \leq 160 \Rightarrow d^2 \leq \frac{20}{9}$. Так как $\frac{20}{9} < 4$, то $d < 2$. Но $d \geq 1$, так что $d = 1$. Поэтому $160 = (2a_1 + 8)(a_1 + 9) \Leftrightarrow a_1^2 + 13a_1 - 44 = 0$. Это уравнение для a_1 не имеет целых корней, так что $n = 9$ отпадает.

$n = 8 \Rightarrow 180 = (2a_1 + 7d)(a_1 + 8d)$.

Имеем $56d^2 \leq 180 \Rightarrow d^2 \leq \frac{45}{14}$. Так как $\frac{45}{14} < 4$, то $d < 2$. Но $d \geq 1$, так что $d = 1$. Поэтому $180 = (2a_1 + 7)(a_1 + 8) \Leftrightarrow 2a_1^2 + 23a_1 - 124 = 0$. Это уравнение имеет единственный целый неотрицательный корень $a_1 = 4$. $n = 8$ подходит.

В первоначальной прогрессии наибольшее количество членов могло быть 8. Прогрессия из 8 членов

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 1, 2, 3. б) Нет. в) 8.

Вариант 41

У Игоря нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Игорь переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из ведер запрещается.

а) Мог ли Игорь через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 3 л воды, если сначала у него были ведра объёмами 5 л и 9 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 л?

б) Мог ли Игорь через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех ведрах, если сначала у него были ведра объёмами 11 л и 7 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 л?

в) Сначала у Игоря были ведра объёмами 6 л и 12 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом n л. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что через несколько шагов Игорь сможет получить ровно 7 л воды в одном из вёдер?

Решение.

Пусть запись (a, b, c) означает, что в первом, втором, третьем ведрах содержатся соответственно a, b, c литров воды (это упорядоченная тройка: например, $(4, 7, 0) \neq (7, 4, 0)$).

Задача решается простым перебором всех вариантов пошагового переливания воды до тех пор, пока не перестанут появляться новые тройки (a, b, c). После некоторого конечного числа шагов новые тройки действительно перестанут появляться, так как их число конечно. В самом деле, каждое из чисел a, b, c может принимать одно из целых неотрицательных значений от 0 до $a + b + c$. Пусть во всем процессе

переливания воды реально участвуют k из этих значений. Тогда число a может принимать не более k значений; с каждым значением числа a сочетается не более k значений числа b, так что количество пар (a,b) будет не более $k \cdot k = k^2$; с каждой парой значений (a,b) сочетается не более k значений числа c, так что количество различных троек (a,b,c) будет не более $k^2 \cdot k = k^3$ – конечное число.

В процессе одного или нескольких вариантов может появиться или не появиться интересующая нас тройка (a,b,c). Возникающее при этом дерево вариантов оформим в виде таблицы. На каждом шаге будем перебирать варианты переливания

$1 \to 2$ (из 1 – го ведра во 2 – е),
$1 \to 3$ (из 1 – го ведра в 3 – е),

$2 \to 1$ (из 2 – го ведра в 1 – е),
$2 \to 3$ (из 2 – го ведра в 3 – е),

$3 \to 1$ (из 3 – го ведра в 1 – е),
$3 \to 2$, (из 3 – го ведра во 2 – е),

пропуская невозможные варианты. При получении тройки, уже встречавшейся до этого шага, будем ее вычеркивать, так как от нее ветвь дерева уже пошла до этого. Если на некотором шаге появилось несколько одинаковых троек, будем вычеркивать все кроме одной, чтобы ветви дерева не повторялись. Каждая ветвь дерева на некотором шаге закончится – перестанут появляться новые тройки (все тройки будут зачеркнуты).

а) Таблица начнется с 0-го шага (5,9,0).

Для 1-го шага возможные варианты

$1 \to 3$ (0,9,5), $2 \to 3$ (5,0,9).

Видим (рис.2.26), что на 5-м шаге переливания во 2-м ведре

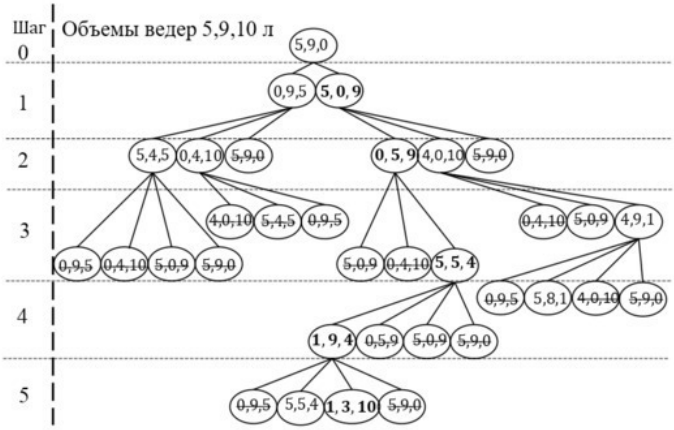


Рис.2.26

оказалось ровно 3 л воды. Продолжать оставшуюся справа ветвь дерева нет необходимости, так как ответ уже получен: Игорь мог. Например, действуя по варианту

$$(5,9,0) \to (5,0,9) \to (0,5,9) \to (5,5,4) \to (1,9,4) \to (1,3,10).$$

б) После каждого переливания либо одно из ведер становится пустым, либо одно из ведер становится полным. Если во всех ведрах оказались равные объемы воды, то в каждом из них оказались 6 л воды. Значит, ни одно из ведер не пусто и не полно. Пришли к противоречию. Игорь не мог.

в) Рассмотрим случай $n \geq 6 + 12 = 18$. Поскольку в 3-е ведро больше 18 л воды не нальется, то при $n \geq 18$ объем его незаполняемой части не имеет значения: он не влияет на процедуру переливания. Поэтому будем считать, что объем 3-го ведра 18 л.

Итак, имеем ведра объемами 6, 12 и 18 л. Стартовая позиция (6,12,0).

Процедура переливания в любом варианте закончена (рис.2.27). Ни при каком варианте при объеме 3-го ведра $n \geq 18$

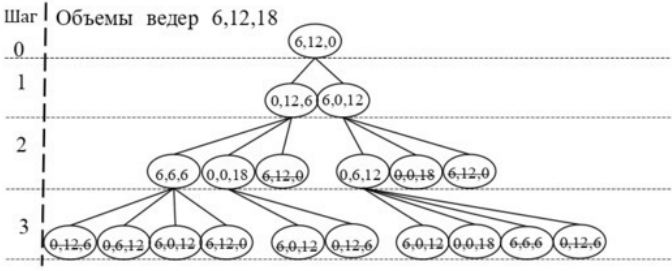


Рис.2.27

нельзя получить 7 л воды в каком либо ведре (между прочим, все объемы оказались кратны 6). Попробуем $n = 17$.

Видим (рис.2.28), что на 4-м шаге во 2-м ведре оказалось ровно 7 л воды при варианте

$$(6,12,0) \to (0,12,6) \to (0,1,17) \to (6,1,11) \to (0,7,11)\,.$$

Продолжать оставшуюся справа ветвь дерева нет

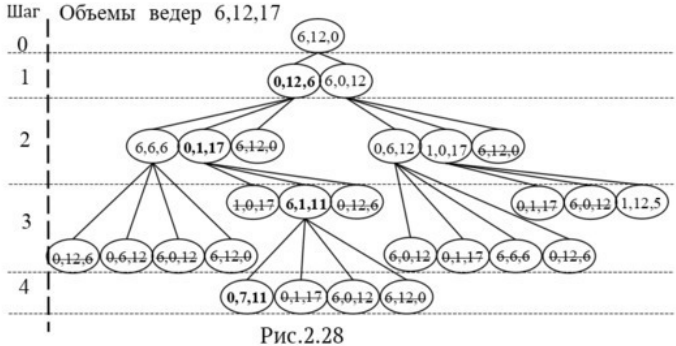


Рис.2.28

необходимости.

Наибольшее значение n, при котором после нескольких переливаний в каком-либо ведре оказывается 7 л воды, равно 17.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) 17.

Вариант 42

У Ромы нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух их которых есть вода. За один шаг Рома переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из ведер запрещается.

а) Мог ли Рома через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 4 л воды, если сначала у него были ведра объёмами 3 л и 8 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 9 л?

б) Мог ли Рома через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех ведрах, если сначала у него были ведра объёмами 8 л и 10 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 11 л?

в) Сначала у Ромы были ведра объёмами 4 л и 8 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом n л. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что через несколько шагов Рома сможет получить ровно 5 л воды в одном из вёдер?

Решение.

Повторяется решение варианта 41 с другими числовыми данными.

Ответ: а) Да, например

$(3,8,0) \to (3,0,8) \to (2,0,9) \to (2,8,1) \to (3,7,1) \to (0,7,4)$.

б) Нет.

в) 11. Например,

$(4,8,0) \to (0,8,4) \to (0,1,11) \to (4,1,7) \to (0,5,7)$.

Вариант 43

У Жени нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух их которых есть вода. За один шаг Женя переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из ведер запрещается.

а) Мог ли Женя через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 6 л воды, если сначала у него были ведра объёмами 5 л и 8 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 9 л?

б) Мог ли Женя через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех ведрах, если сначала у него были ведра объёмами 7 л и 8 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 л?

в) Сначала у Жени были ведра объёмами 5 л и 10 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом n л. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что через несколько шагов Женя сможет получить ровно 6 л воды в одном из вёдер?

Решение.

Повторяется решение варианта 41 с другими числовыми данными.

Ответ: а) Да, например

$(5,8,0) \to (5,0,8) \to (4,0,9) \to (4,8,1) \to (5,7,1) \to (0,7,6)$.

б) Нет.

в) 14. Например,

$(5,10,0) \to (0,10,5) \to (0,1,14) \to (5,1,9) \to (0,6,9)$.

Вариант 44

У Вити нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух их которых есть вода. За один шаг Витя переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду

из ведер запрещается.

а) Мог ли Витя через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 5 л воды, если сначала у него были ведра объёмами 3 л и 6 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 7 л?

б) Мог ли Витя через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех ведрах, если сначала у него были ведра объёмами 6 л и 9 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 7 л?

в) Сначала у Вити были ведра объёмами 2 л и 4 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом n л. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что через несколько шагов Витя сможет получить ровно 3 л воды в одном из вёдер?

Решение.

Повторяется решение варианта 41 с другими числовыми данными.

Ответ: а) Да, например

$(3,6,0) \to (0,6,3) \to (3,2,7) \to (3,2,4) \to (0,5,4)$.

б) Нет.

в) 5. Например,

$(2,4,0) \to (2,0,4) \to (1,0,5) \to (0,1,5) \to (2,1,3)$.

Вариант 45

У Бори нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух их которых есть вода. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из ведер запрещается.

а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 2 л воды, если сначала у него были ведра объёмами 4 л и 7 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 л?

б) Мог ли Боря через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех ведрах, если сначала у него были ведра

объёмами 5 л и 7 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 л?

в) Сначала у Бори были ведра объёмами 3 л и 6 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом n л. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что через несколько шагов Боря сможет получить ровно 4 л воды в одном из вёдер?

Решение.

Повторяется решение варианта 41 с другими числовыми данными.

Ответ: а) Да, например

$(4,7,0) \to (4,0,7) \to (0,4,7) \to (4,4,3) \to (1,7,3) \to (1,2,8)$.

б) Нет.

в) 8. Например,

$(3,6,0) \to (0,6,3) \to (0,1,8) \to (3,1,5) \to (0,4,5)$.

Вариант 46

Даны пять различных натуральных чисел. Известно, что их произведение равно 6750.

а) Могут ли все пять чисел образовывать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли четыре числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

в) Могут ли три числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

Решение.

Повторяется решение варианта 37 с произведением 6750 вместо 792. Рассмотрим только окончание решения.

Произведение членов прогрессии P должно входить в состав произведения всех данных чисел 6750, следовательно, число 6750 должно иметь хотя бы один простой делитель в степени $\frac{k(k-1)}{2}$.

Из разложения $6750 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ видим, что может быть

только $\frac{k(k-1)}{2} = 1$ или 3, так что $\frac{k(k-1)}{2} \le 3$. Решим это неравенство: $\frac{k(k-1)}{2} \le 3 \Leftrightarrow k^2 - k - 6 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le k \le 3$. Так как $k \in N$, то $k \le 3$.

Теперь можем дать ответы к задаче. Три числа из пяти данных чисел ($k = 3$) могут образовать геометрическую прогрессию. Например, из 3^3 извлечем геометрическую прогрессию: 1, 3, 9. Тогда, как вариант, 5 чисел будут 1, 3, 9, 2, 125. Четыре числа из пяти или все пять чисел не могут образовать геометрическую прогрессию.

Ответ: а) Нет. б) Нет. в) Могут, например, 1, 3, 9, 2, 125.

Вариант 47

Даны пять различных натуральных чисел. Известно, что их произведение равно 2160.

а) Могут ли все пять чисел образовывать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли четыре числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

в) Могут ли три числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

Решение.

Повторяется решение варианта 37 с произведением 2160 вместо 792. Рассмотрим только окончание решения.

Произведение членов прогрессии P должно входить в состав произведения всех данных чисел 2160, следовательно, число 2160 должно иметь хотя бы один простой делитель в степени $\frac{k(k-1)}{2}$.

Из разложения $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$ видим, что может быть только $\frac{k(k-1)}{2} = 4$, 3 или 1, так что $\frac{k(k-1)}{2} \le 4$. Решим это неравенство: $\frac{k(k-1)}{2} \le 4 \Leftrightarrow k^2 - k - 8 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33}) \le k \le \frac{1}{2}(1 + \sqrt{33})$.

Так как $k \in N$, то $k \le \frac{1}{2}(1 + \sqrt{33}) <. \frac{1}{2}(1 + 6) = 3{,}5 \Rightarrow k \le 3$.

Теперь можем дать ответы к задаче. Три числа из пяти данных чисел ($k = 3$) могут образовать геометрическую прогрессию. Например, из 2^4 извлечем геометрическую прогрессию: 1, 2, 4. Тогда, как вариант, 5 чисел будут 1, 2, 4, 10, 27. Четыре числа из пяти или все пять чисел не могут образовать геометрическую прогрессию.

Ответ: а) Нет. б) Нет. в) Могут, например, 1,2,4,10, 27.

Вариант 48

Даны пять различных натуральных чисел. Известно, что их произведение равно 6000.

а) Могут ли все пять чисел образовывать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли четыре числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

в) Могут ли три числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

Решение.

Повторяется решение варианта 37 с произведением 6000 вместо 792. Рассмотрим только окончание решения.

Произведение членов прогрессии P должно входить в состав произведения всех данных чисел 6000, следовательно, число 6000 должно иметь хотя бы один простой делитель в степени $\frac{k(k-1)}{2}$.

Из разложения $6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$ видим, что может быть только $\frac{k(k-1)}{2} = 4$, 1 или 3, так что $\frac{k(k-1)}{2} \le 4$. Решим это неравенство:

$$\frac{k(k-1)}{2} \le 4 \Leftrightarrow k^2 - k - 8 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33}) \le k \le \frac{1}{2}(1 + \sqrt{33}).$$

Так как $k \in N$, то

$$k \le \frac{1}{2}(1 + \sqrt{33}) < \frac{1}{2}(1 + 6) = 3{,}5 \Rightarrow k \le 3.$$

Теперь можем дать ответы к задаче. Три числа из пяти данных чисел ($k = 3$) могут образовать геометрическую прогрессию. Например, из 2^4 извлечем геометрическую

прогрессию: 1, 2, 4. Тогда, как вариант, 5 чисел будут 1, 2, 4, 6, 125. Четыре числа из пяти или все пять чисел не могут образовать геометрическую прогрессию.

Ответ: а) Нет. б) Нет. в) Могут, например, 1,2,4,6, 125.

Вариант 49

На доске в одну строку слева направо написаны несколько необязательно различных натуральных чисел. Известно, что каждое следующее число, кроме первого, или на 1 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего.

а) Может ли оказаться так, что первое число 12, а седьмое равно 2?

б) Может ли оказаться так, что первое число равно 1200, а двадцать пятое равно 63?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске, если первое число 1200, а последнее число равно 5?

Решение.

Переход от числа a к следующему числу b будем записывать в виде

$$a \xrightarrow{(:2)} b, \text{ если } a > b, \text{ и } a \xrightarrow{(+1)} b, \text{ если } a < b.$$

а) Если $12 \xrightarrow{(:2)} 6 \xrightarrow{(:2)} 3 \xrightarrow{(+1)} 4 \xrightarrow{(:2)} 2$, то неудачно: до 2 дошли преждевременно. Удлиним путь:

$$12 \xrightarrow{(:2)} 6 \xrightarrow{(:2)} 3 \xrightarrow{(+1)} 4 \xrightarrow{(:2)} 2 \xrightarrow{(:2)} 1 \xrightarrow{(+1)} 2.$$

Получилась строка 12, 6, 3, 4, 2, 1, 2.

Для пунктов б) и в) рассмотрим алгоритм кратчайшего перехода от натурального числа a к натуральному числу b.

Если $a < b$, то просто прибавляем 1 до получения b.

Если $a > b$, то есть два варианта: a – нечетное или четное.

Если a – нечетное, то выбора нет – прибавляем 1, после чего число становится четным.

Пусть a – четное. Прибавлять 1 не имеет смысла, так как число станет нечетным и придется к нему снова прибавить 1,

при этом число возрастает, а нам надо уменьшать. Поэтому делим на 2 до тех пор, пока число не станет равным b (тогда процесс закончен) или впервые станет меньше b. Во втором случае прибавляем 1 до тех пор, пока не получим b. При этом может оказаться, что в процессе деления на 2 получилось нечетное число, а оно все еще больше b. Тогда прибавляем к нему 1, полученное четное число делим на 2 дальше.

Применим описанный алгоритм к пунктам б) и в).

б) $\underbrace{1200 \xrightarrow{(:2)} 600 \xrightarrow{(:2)} 300 \xrightarrow{(:2)} 150 \xrightarrow{(:2)} 75 \xrightarrow{(+1)} 76 \xrightarrow{(:2)} 38}_{\text{7 чисел}} \xrightarrow{(+1)} \underbrace{39 \xrightarrow{(+1)} 40 \xrightarrow{(+1)} \ldots \xrightarrow{(+1)} 63}_{\text{25 чисел}}$

Видим, что 32 – наименьший возможный номер числа 63 в строке и потому 63 не может быть 25 -м числом.

в) $1200 \xrightarrow{(:2)} 600 \xrightarrow{(:2)} 300 \xrightarrow{(:2)} 150 \xrightarrow{(:2)} 75 \xrightarrow{(+1)} 76 \xrightarrow{(:2)} 38 \xrightarrow{(:2)} 19 \xrightarrow{(+1)} 20 \xrightarrow{(:2)} 10 \xrightarrow{(:2)} 5$

Наименьшее количество чисел 11.

Ответ: а) 12, 6, 3, 4, 2, 1, 2 . б) Нет. в) 11.

Вариант 50 (повторяется вариант 49 с другими числовыми данными).

Список литературы

1. ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. Готовимся к итоговой аттестации. / Под редакцией И.В. Ященко. М.: Интеллект-Центр, 2019.

2. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. Типовые варианты экзаменационных заданий. 50 вариантов. / Под редакцией И.В. Ященко. М.: Экзамен, 2020.

3. http://www.unn.ru/books/met_files/mmi.pdf

4. https://studfile.net/preview/8120867/

5..https://moluch.ru/young/archive/11/823/

6. https://ege.sdamgia.ru/

7. https://ege-study.ru/

Оглавление

0. Введение … … … … … … … … … … … … … … ….. 3
Универсальный алгоритм извлечения квадратного корня из десятичной дроби … … … … … … … … … … … …4
Теорема о делении с остатком … … … … … … … …. 5

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «ЛитРес».

Прочитайте эту книгу целиком, купив полную легальную версию на ЛитРес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.