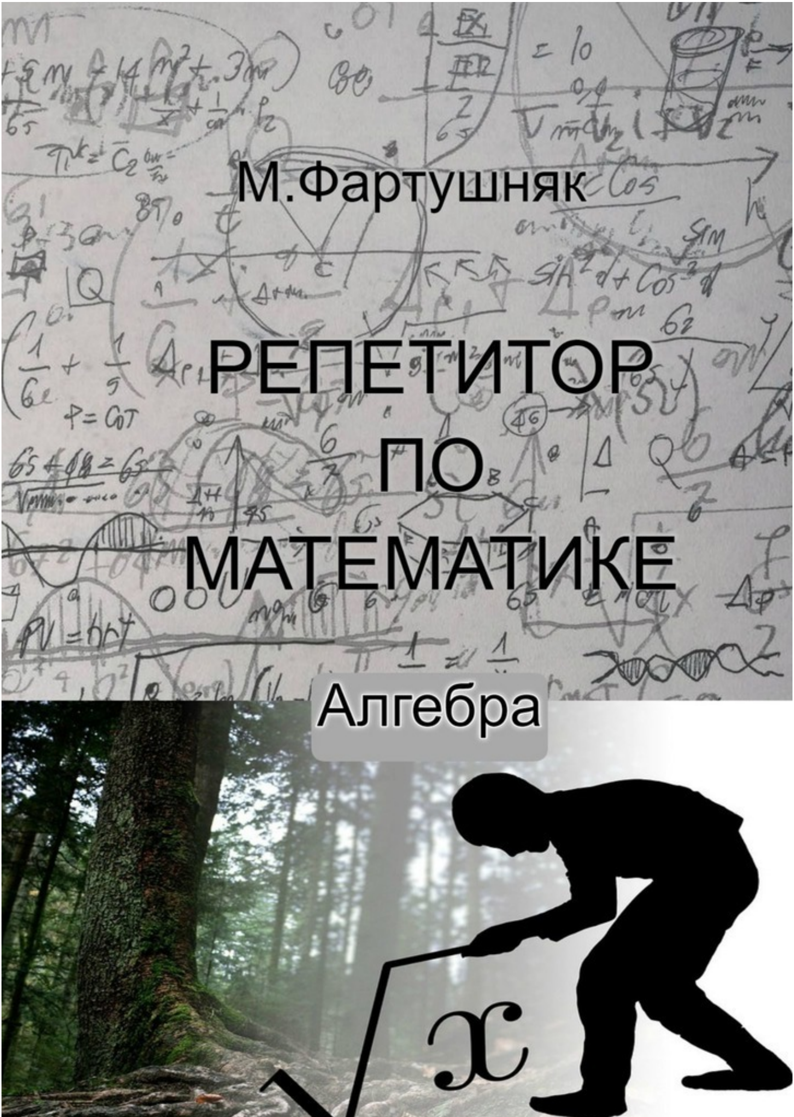
М.Фартушняк

РЕПЕТИТОР ПО МАТЕМАТИКЕ

Алгебра



М. Л. Фартушняк
Репетитор по математике. Алгебра

http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=67597740
ISBN 9785005635471

Аннотация

В книге в простой и удобной форме объяснено решение разнообразных уравнений, неравенств и их систем (включая показательные и логарифмические), а также решение текстовых задач, большое внимание уделено функциональным зависимостям между величинами и числовым последовательностям. Отличительной особенностью является наличие небольшого теоретического материала, тестовых заданий и задач для самостоятельного решения. Предназначена для учителей, выпускников школ и абитуриентов.

Содержание

Введение или как работать с этой книгой 6
некоторые математические обозначения 14
Алгебра 15
Тема 1 16
Возведение в степень, свойства степени, корни, действия с корнями 16
Тестовые задания к теме 1 28
Тест 1 29
Тест 2 31
Тест 3 33
Тест 4 35
Тест 5 37
Задачи 39
Тема 2 41
Одночлен. Многочлен. Преобразование алгебраических выражений. Формулы сокращённого умножения. Разложение многочлена на множители 41
Тестовые задания к теме 2 56
тест 1 57
тест 2 59
тест 3 60
тест 4 62

тест 5 64
тест 6 66
ЗАДАЧИ 68
Тема 3 70
Уравнение, общие сведения. Равносильные уравнения. Основные приёмы решения уравнений. Классификации уравнений. Решение простейших линейных и квадратных уравнений, а также уравнений приводящихся к квадратным 70
Конец ознакомительного фрагмента. 72

Репетитор по математике. Алгебра

М. Л. Фартушняк

Дизайнер обложки М. Л. Фартушняк

ISBN 978-5-0056-3547-1
Создано в интеллектуальной издательской системе Ridero

Введение или как работать с этой книгой

«Репетитор по математике. Алгебра» -это вторая книга серии. Первую книгу «Репетитор по математике. Арифметика» вы можете скачать в электронном виде практически из любого книжного магазина в Интернете.

1. Почему репетитор? Название возникло сразу. Не потому, что подобных названий почти нет. Судите сами, это ведь не учебник, где весь учебный материал подаётся от более простого к сложному. В учебнике существует тенденция перескакивания с одной темы на другую, а потом возвращение к уже более сложным заданиям. В репетиторе такого нет. Если вы начали изучать какую-то тему, то изучаете её от начала и до конца. Кроме этого, в репетиторе теоретический материал подан в самом необходимом, минимальном объёме без каких-либо доказательств и выведения формул. Это также и не справочник, где существует множество формул, определений, таблиц, где много теоретического материала, но почти нет практического применения теоретических знаний. Цель же репетитора – обучение практическим навыкам решения разнообразных математических задач. Наиболее похож репетитор на практикум, там тоже большое внимание уделяется практическим занятиям, но в отличие от практикума, где почти нет теоретического материала, в репетиторе он присутствует. Кроме этого, в данном учебном пособии есть тестовые задания, которые, как правило, отсутствуют в учебниках, справочниках, практикумах.

2. Кому прежде всего будет полезна эта книга? Репетитор ориентирован на основные задания, которые могут встретиться на выпускных экзаменах за курс средней школы и на вступительных экзаменах в высшие учебные заведения. Поэтому данное пособие прежде всего станет незаменимым помощником именно для данных категорий учащихся. Он также может быть применим и учителями выпускных классов средней школы, а также тем, кто хочет повысить свою математическую грамотность и научиться решать типовые математические задачи. Автор отдаёт себе отчёт в том, что никакое учебное пособие не заменит реального живого репетитора, который сможет подкорректировать и направить свои усилия на те разделы математики, в которых ученик разбирается не совсем хорошо. Увы, книга лишена такой возможности. Она может служить только дополнением к занятиям с реальным репетитором. Однако репетитор стоит немалых денег и не у всех есть возможность его нанять. Поэтому данное учебное пособие является хоть и неполной, но альтернативой. Ещё будучи учителем в школе, автор обратил внимание, что овладеть основными математическими навыками может практически любой человек. Есть только небольшой процент людей, которые не могут этого сделать по разным объективным причинам. Остальные не знают математику и не умеют решать математические задачи, потому что, или не хотят, или не хватает времени, или просто в жизни это может не пригодится, или лень заниматься каждый день. Таким людям я не рекомендую открывать репетитор. Вы не добьётесь желаемого результата и будете винить во всём автора. А для тех, кто решил серьёзно заняться изучением математики – добро пожаловать на страницы этого пособия. Если хотя бы половине этих людей репетитор поможет, автор будет считать, что его труд не был напрасным.

3. Чем же репетитор отличается от других учебных пособий? Прежде всего простотой подачи материала. Автор общается с обучаемым и указывает на характерные ошибки, которые могут встретиться при решении задач. В репетиторе показано решение типовых задач, а также задач повышенной трудности. Каждая задача или пример решается досконально с пояснениями, что позволяет усвоить базовые навыки даже людям, которые считали, что математика не для них.

4. О структуре данной книги. Вся книга поделена на 23 темы. В каждой теме есть необходимый минимум теоретического материала, примеры решения задач. В конце каждой темы даются один или несколько тестовых заданий (кроме тем 12 и 21) и задачи для самостоятельного решения.

Поговорим отдельно о каждой из этих составляющих.

Теоретический материал. Как было уже сказано ранее, это тот необходимый минимум, без которого невозможно обойтись при решении заданий. Если формула выведена крупным шрифтом – её необходимо запомнить. Тоже самое касается формулировок и прочих элементов теории. Таких обязательных элементов для запоминания в книге немного. Обучение построено по американской системе, где от учащегося не требуется зазубривание теоретического материала, а предпочтение отдаётся только навыкам его применения на практике. Поэтому, при самостоятельном решении задач автор разрешает пользоваться формулами. Запоминание формул произойдёт автоматически при практическом их применении. В конце книги собран и изложен в кратком виде весь теоретический материал. Им вы можете пользоваться при решении задач. Это не значит, что теоретический материал можно совсем не изучать или изучить бегло. Как я уже сказал, в конце каждой темы есть тестовые задания и без базовых знаний теоретического материала, вы вряд ли сможете их пройти.

Примеры решения задач. В репетиторе рассмотрены решения как базовых типовых задач, так и задач повышенной сложности. Многие задания взяты из конкурсных задач по математике, которые были предложены абитуриентам при поступлении в высшие учебные заведения в 70 – 80х годах прошлого столетия. Поверьте, если вы научитесь решать эти задачи, то любой экзамен вам будет по плечу. Часть заданий взята из экзаменационных задач за курс средней школы, часть из других источников. Автор уважает авторские права других, поэтому в конце книги дан список использованной литературы. Как было сказано выше, все примеры решения задач приведены с подробными пояснениями.

Тестовые задания. К каждой теме предложено один или несколько тестовых заданий, в зависимости от объёма теоретического материала. Каждое тестовое задание включает 12 вопросов с четырьмя вариантами ответов, один из которых является правильным. Оценивание тестовых заданий производится по 12-ти бальной системе. Чтобы не путаться, привожу перевод 12-ти бальной системы в 5-ти бальную.

12 баллов – оценка 5+
11 баллов – 5
10 баллов – 5-
9 баллов – 4+
8 баллов – 4
7 баллов – 4-
6 баллов – 3+
5 баллов – 3
4 балла – 3-
3 балла – 2+
2 балла – 2
1 балл – 2 —

Я надеюсь, что последние шесть строчек вам не понадобятся при оценивании тестовых заданий. Только все должно быть по-честному. Помните, если вы будете не объективны, то в первую очередь обманите сами себе.

Теперь, как оценивать тестовые задания. За каждое правильное тестовое задание начисляется 1 балл. По количеству набранных баллов и выставляется итоговая оценка по 12-ти бальной системе. Например, вы ответили правильно на 7 вопросов-это оценка 4-. При 11-ти верных ответах имеете оценку 5, а при 12-ти имеете максимум 5+.

Продолжительность тестирования – 25—30 минут. Выделите для тестирования отдельный день. Берите чистый лист бумаги и вперёд. Тесты – это не только интересно, но и познавательно. Желательно пройти все предложенные тесты (но не более двух за один день), в конце книги имеются ответы на тестовые задания для проверки. Не стоит в них заглядывать раньше времени.

Задачи для самостоятельного решения. Автор сознательно не выделял какими-то знаками задания повышенной сложности и считает, что такое приём способствует более спокойному решению задач без излишнего волнения и стресса. В процессе решения вы сами сможете понять, сложна для вас данная задача или нет. Притом сложность задачи – это субъективная оценка. Некоторые с лёгкостью могут решать подобные задачи, а вот более простые в нашем понимании могут вызвать затруднение. Если вы поняли, что можете приступать к решению задач, то не медлите. Каких-то ограничений по количеству решаемых задач в день нет. Когда поняли, что устали, то занятие можно прекратить, но хотя бы 30 – 40 минут в день вы должны уделять решению задач. Это не обязательно делать изо дня в день. Через какое-то время можно сделать себе 1- 2-х дневный перерыв. Но с отдыхом не затягивайте. Почувствовав, что немного отдохнули и есть свободное время, приступайте снова к решению задач. Автор рекомендует решить все задачи, которые есть в разделе для самостоятельного решения. Решив какую-то задачу, загляните в раздел «ответы» и, убедившись, что вы все решили правильно, продолжайте дальше. Если ваш ответ не совпадает с ответом в конце книги, рекомендуется ещё раз пройтись по своему решению и выявить ошибки. Если вы их не обнаружили, то загляните в раздел «Указания к решению задач». Он находится после раздела ответов. Прочитав указания к решению задач (они есть практически ко всем задачам), снова приступайте к решению сложной для вас задачи. К задачам для самостоятельного решения есть полные и подробные решения, которые находятся в соответствующем разделе. Но это последний раздел, в который вам следует заглянуть. Это в том случае, когда задача не решается без посторонней помощи. Не злоупотребляйте этим разделом, иначе вы так никогда и не научитесь решать математические задачи. Постарайтесь ограничиться только разделом «Указания к решению задач». Этого бывает достаточно, чтобы понять свою проблему и попытаться её искоренить.

В конце книги, как я уже сказал, находится справочный раздел, ответы к тестовым заданиям, ответы к задачам для самостоятельного решения, указания к решению задач, решение задач. Кроме этого, там же находится список использованной литературы. Структура книги максимально удобна для использования. А в начале книги предложены условные математические обозначения, которые будут встречаться в дальнейшем.

Автор будет благодарен за любые замечания и обнаруженные неточности и ошибки при написании этого пособия. А также будет рад любому мнению и практическим советам от учителей и преподавателей математики по улучшению данной книги.

некоторые математические обозначения

$=$	равно
$\neq$	неравно
$\approx$	приближённо равно
$>$	больше
$<$	меньше
$\geq$	больше или равно
$\leq$	меньше или равно
$\cdot$ $\times$	умножение
$\div$:	деление
$+$	сумма
$-$	разность
1/2 $\frac{1}{2}$	запись дробных чисел
$\pm$	плюс – минус
$\lvert\ \rvert$	абсолютная величина(модуль)
$\sqrt{a}$	квадратный корень
$\sqrt[n]{a}$	корень n – й степени
$\Rightarrow$	следует
$\Leftrightarrow$	равносильно
$\in$	принадлежит
$\notin$	не принадлежит
$\varnothing$	пустое множество
∞	бесконечность
const	постоянная величина

min	минимум
max	максимум
N	множество натуральных чисел
Z	множество целых чисел
Q	множество рациональных чисел
R	множество действительных чисел
$\cup$	объединение множеств
$\cap$	пересечение множеств
$[a, b]$	закрытый промежуток(отрезок)
(a, b)	открытый промежуток(интервал)
$(a, b]$ $[a, b)$	полуоткрытые промежутки
$\log_a b$	логарифм числа b по основанию a
lg b	десятичный логарифм числа b(основание 10)
ln b	натуральный логарифм(основание e = 2.71...)
!	факториал (напр. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$)
P_n	число перестановок с n элементов
C_n^m	число соединений из n элементов по m элементов
A_n^m	число размещений из n элементов по m элементов

Алгебра

Это один из основных разделов математики. В нем мы научимся преобразовывать алгебраические выражения, решать разнообразные уравнения, неравенства, а также их системы (в том числе показательные и логарифмические). Большое внимание уделим текстовым задачам, а также ознакомимся с понятием «функция» и научимся строить графики различных функций. Просьба, по возможности, решить все предложенные задачи в этом разделе и пройти все тестовые задания.

Тема 1

Возведение в степень, свойства степени, корни, действия с корнями

Возвести число в целую степень n, значит повторить его сомножителем n раз т.е.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ раз}}$$

a – называется основанием степени, n – показатель степени.

Например, $6^2 = 6 \times 6 = 36$, $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

Вторая степень называется квадратом, третья – кубом.

Так 6^2 – читается "шесть в квадрате",

2^3 – читается "два в кубе",

3^4 – читается "три в четвёртой степени"

Запомните!

1) Первой степенью числа называют само это число.

$$a^1 = a, \text{ примеры: } 5^1 = 5, \ -125^1 = -125, \ \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4}$$

2) Любое число (кроме нуля) в нулевой степени есть единица.

$a^0 = 1$, примеры: $125^0 = 1$, $-12^0 = 1$, $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$

3) Нуль в любой неотрицательной степени есть нуль.

$0^n = 0$, например $0^8 = 0$, $0^{\frac{1}{4}} = 0$

Примечание: на протяжении многих веков ведётся спор о значении выражения 0^0. Сторонников, что $0^0 = 1$ ничуть не больше тех, кто считает $0^0 = 0$. С точки зрения здравого смысла подразумевают, что выражение 0^0 не определено.

4) Единица в любой степени есть единица.

$1^n = 1$, примеры: $1^8 = 1$, $1^{-5} = 1$, $1^{\frac{2}{3}} = 1$

Отрицательный показатель степени.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, например: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

Примечание: теперь понятно, почему ноль нельзя возвести в отрицательную степень, мы получим выражение $\frac{1}{0}$, которое не имеет смысла.

Дробный показатель степени.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\text{, например } 9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9^2} = \sqrt[3]{81}$$

Дробный отрицательный показатель степени

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\text{, например } 9^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9^2}}$$

Теперь рассмотрим свойства степени. Для удобства мы составили таблицу, в котором привели примеры не только с натуральными показателями степени, но и с рациональными и действительными.

Свойства	Примеры		
	Натуральный показатель	Рациональный	Действительный
1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$	$2^2 \times 2^5 = 2^7 = 128$	$6^{\frac{1}{5}} \times 6^{\frac{2}{5}} = 6^{\frac{3}{5}}$	$5^{\sqrt{2}} \times 5^{\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{12^5}{12^3} = 12^2 = 144$	$\frac{3^{\frac{4}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{\frac{4}{5}-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{3}{5}}$	$\frac{a^{\sqrt{7}}}{a^{\sqrt{2}}} = a^{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$
3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$	$(2^3)^2 = 2^6 = 64$	$\left(4^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}} = 4^1 = 4$	$(3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = 3^3 = 27$
4. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$(7 \times 2)^2 = 7^2 \times 2^2 = 196$	$(4 \times 9)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$	$(5 \times 6)^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}} \times 6^{\sqrt{2}}$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} (b \neq 0)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$	$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{5}{16}\right)^{\sqrt{3}} = \frac{5^{\sqrt{3}}}{16^{\sqrt{3}}}$

Необходимые пояснения к свойствам степени.

Первые два свойства указывают на действия со степенями с одинаковыми основаниями. При умножении таких степеней их показатели складываются (свойство 1), при делении – вычитаются (свойство 2). Третье свойство – это свойство возведения степени в степень – показатели степени перемножаются (свойство 3).

Следующие два свойства – это возведение в степень произведения (свойство 4) и частного (свойство 5). Притом, свойство 4 справедливо для любого числа сомножителей. Применение данных правил позволяет существенно облегчить вычисления.

Задача 1: Вычислите $\left(0.25^{-4}5^{-1.5}\right)^{2} \times \left(\frac{0.25^{-3}}{20}\right)^{-3}$

Решение: $\left(0.25^{-8}5^{-3}\right) \times \left(\frac{0.25^{9}}{20^{-3}}\right)$**(применено свойство 4).**

Далее группируем множители:

$0.25^{-8} \times 0.25^{9} \times \frac{5^{-3}}{20^{-3}}$

Применяем свойства 1 и 2:

$0.25^{1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

Окончательно получаем: $0.25 \times 4^{3} = 0.25 \times 64 = 16$

Задача 2: Сравните 4^{500} **и** 5^{400}

Решение: Согласно свойства 3 можно представить

$4^{500} = \left(4^{5}\right)^{100} = 1024^{100}$ **и** $5^{400} = \left(5^{4}\right)^{100} = 625^{100}$

Как видим $4^{500} > 5^{400}$

Извлечение корня есть нахождение основания степени по степени и её показателю. Записывается это так

$\sqrt[n]{a} = b$ при $b \geq 0$. Говорят " корень n – ой степени из a".
Здесь a – подкоренное число, n – показатель корня.
Извлечение корня есть операция, обратная возведению в степень, т.е
$b^n = a$.
Корень второй степени называется квадратным,
корень третьей степени – кубичным.
Для квадратного корня показатель корня опускают. Т.е. записывают
$\sqrt{4}$ вместо $\sqrt[2]{4}$

Основные свойства корня.

1) Если за корнем следует степень, равная показателю корня,
то корень можно опустить, например

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \text{ например } \left(\sqrt[3]{-5}\right)^3 = -5$$

2) Если подкоренное число имеет степень равную показателю корня, то оно равно модулю подкоренного числа.

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \text{ например } \sqrt[3]{-5^3} = 5$$

Основные действия с корнями (все эти правила справедливы при

a≥0 и b≥0)

Свойство	Пояснение	Примеры
1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$	Корень из произведения двух множителей (правило справедливо для любого количества множителей)	$\sqrt[3]{8\times27\times125}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{125}=2\times3\times5=30$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ 2. b ¿0	Корень из частного двух чисел.	$\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}=\sqrt[5]{\frac{243}{32}}=\frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}}=\frac{3}{2}$
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$	Возведение корня в степень (показатель корня и степень разные)	$\left(\sqrt[6]{10^2}\right)^3=\sqrt[6]{\left(10^2\right)^3}=\sqrt[6]{10^6}=10$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[n\times k]{a}$	Извлечение одного корня из под другого (показатели корней перемножаются)	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}}=\sqrt[4\times3]{4096}=\sqrt[12]{4096}=2$
5. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\times k]{a^{m\times k}}$ Или $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n:k]{a^{m:k}}$	Величина корня не изменится, если показатель корня и степень подкоренного числа умножить или разделить на одно и то же число.	$\sqrt[6]{4^4}=\sqrt[3]{4^2}=\sqrt[3]{16}$ (показатель корня и степень подкоренного выражения разделили на 2)

Все вышеизложенные правила позволяют существенно облегчить вычисления.

Рассмотрим две операции: внесение множителя под знак корня и вынесение множителя из-под знака корня при решении задач.

Задача 3: Сравните числа $\sqrt{50}$ и $6\sqrt{2}$
Решение: 1 способ
Представим 50 как произведение 25×2. Тогда $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
Нетрудно заметить, что $\sqrt{50} < 6\sqrt{2}$.
В данном случае мы заменили $\sqrt{50}$ произведением чисел 5 и $\sqrt{2}$.
Такое преобразование называется вынесением множителя из под знака корня.
2 способ
Представим 6 как корень $\sqrt{36}$. Тогда $6\sqrt{2} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{72}$
Снова видим, что $\sqrt{50} < 6\sqrt{2}$.
Подобное преобразование называется внесением множителя под знак корня.

Задача 4: Вычислите $3\sqrt{25} - \sqrt{100} + 4\sqrt{225}$
Решение: Представим $\sqrt{100} = \sqrt{25 \times 4} = 2\sqrt{25}$
$\sqrt{225} = \sqrt{9 \times 25} = 3\sqrt{25}$
Таким образом,
$$3\sqrt{25} - \sqrt{100} + 4\sqrt{225} = 3\sqrt{25} - 2\sqrt{25} + 12\sqrt{25} = \sqrt{25}(3 - 2 + 12) =$$
$$=13\sqrt{25} = 13 \times 5 = 65$$

Очень часто при преобразованиях пользуются приёмом уничтожения иррациональности в знаменателе или числителе дроби. Такой метод позволяет упростить приближенные вычисления. Рассмотрим его на примере.

Задача 5: Найти приближённое значение выражения $\frac{4-3\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}$

Решение: Вычисления упростятся, если мы предварительно освободимся от иррациональности в знаменателе дроби.

Для этого умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{6}+1$. Получим

$$\frac{4-3\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}=\frac{(4-3\sqrt{6})(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)}=\frac{4\sqrt{6}-3(\sqrt{6})^2+4-3\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}-3\times 6+4}{6-1}=\frac{\sqrt{6}-14}{5}$$

Для тех, кому не особо понятны данные преобразования, поясню: мы специально подобрали слагаемое $\sqrt{6}+1$, чтобы в знаменателе получилась разность квадратов. Действительно, $(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)=(\sqrt{6})^2-1=6-1=5$ (о формулах сокращённого умножения, если кто забыл мы поговорим позже).

В числителе расскрываем скобки и приводим подобные слагаемые.

Так, $4\sqrt{6}-3\sqrt{6}=\sqrt{6}$. Дальнейшие действия в пояснениях не нуждаются.

Проведя вычисления найдём: $\frac{\sqrt{6}-14}{5}\approx-2.31$

.

Уничтожив иррациональность в знаменателе, мы пришли к такому результату, что нам необходимо разделить приближенное число на целое, что намного точнее и проще, чем делить приближенное число на приближенное и проводить вычисления с большим количеством значащих цифр, чтобы получить два верных знака после запятой.

Тестовые задания к теме 1

Тест 1

1. Возвести число а в целую степень n, значит:
а) прибавить к а n
б) умножить а на n
в) повторить его сомножителем n раз
г) повторить его слагаемым n раз

2. Возвести число а в степень $\frac{m}{n}$, значит:
а) извлечь корень m - ой степени из n - ой степени числа а
б) умножить а на $\frac{m}{n}$
в) возвести число а в степень n, а затем в степень m
г) извлечь корень n - ой степени из m - ой степени числа а

3. Нулевая степень всякого числа, отличного от нуля - это:
а) 1 б) 0 в) само число г) любое число

4. Степень числа а с целым отрицательным показателем m – это:
а) есть единица,делённая на степень того же числа с отрицательным показателем
б) есть $(-a^m)$
в) есть единица, делённая на степень того же числа с положительным показателем, величина которого равна абсолютной величине отрицательного показателя.
г) есть единица

5. Арифметическим корнем n – ой степени из a ,называется:
а) такое число b, что $b^n = a$
б) модуль числа a
в) такое число b, что $b = a^n$
г) такое число b, что $b^a = n$

6. Свойства степени с натуральным показателем $a^n \times a^m =$
а) $a^{n \times m}$ б) a^{n+m} в) $(a^n)^m$ г) $(a^2)^{n+m}$

7. Свойства степени с натуральным показателем $\frac{a^n}{a^m} =$
а) a^{n-m} б) a^{m-n} в) $a^{\frac{n}{m}}$ г) $\frac{1}{a^{n-m}}$

8. Свойства степени с натуральным показателем $(a^m)^n =$
а) a^{m+n} б) $a^{m \times n}$ в) $a^m + a^n$ г) $n \times a^m$

9.Свойства степени с натуральным показателем $(a \times b \times c)^k =$
а) $k \times (a \times b \times c)$ б) $a^k \times b^k \times c^k$ в) $(a \times b)^k + (b \times c)^k$ г) $a^k + b^k + c^k$

10. Свойства степени с натуральным показателем $\left(\frac{a}{b}\right)^k =$
а) $a \times \left(\frac{1}{b}\right)^k$ б) $\frac{a^k}{b^k}$ в) $a \times b^{-k}$ г) $a^k - b^k$

Тест 2

1. Свойства степени с рациональным показателем $a^{\frac{1}{m}} \times b^{\frac{1}{m}} \times c^{\frac{1}{m}} =$

а) $\frac{1}{m} \times a \times b \times c$ б) $\frac{1}{(a \times b \times c)^m}$ в) $\sqrt[m]{a \times b \times c}$ г) $(a - b - c)^m$

2. Свойства степени с рациональным показателем $a^{\frac{m}{n}} =$

а) $\frac{m}{n} \times a$ б) $\sqrt[n]{a^m}$ в) $\sqrt[m]{a^n}$ г) $\frac{1}{a^{m-n}}$

3. Свойства степени с рациональным показателем $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$

а) $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$ б) $\frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[n]{b^m}}$ в) $\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n}$ г) $\frac{m}{n} \times \frac{a}{b}$

4. Найти значение выражения $\frac{2^8 \times 7^9}{14^{10}}$

а) 0.28 б) 28 в) 2.8 г) 28^{-1}

5. Найти значение выражения $\frac{26^5}{13^6 \times 8^4}$

а) 1664 б) $\frac{1}{1664}$ в) 0.1664 г) 16.64

6. Найти значение выражения $\frac{12^5}{2^3 \times 4^5}$

а) 243.8 б) $\frac{8}{243}$ в) $\frac{1}{243}$ г) $\frac{243}{8}$

7. Найти значение выражения $\frac{10^5}{2^6 \times 5^7}$

а) $\frac{1}{50}$ б) 0.2 в) 1.5 г) 5

8. Найти значение выражения $x^{-2} \times (x^2)^5 : x^2$

а) x^{-6} б) x^3 в) x^6 г) x^{-3}

9. Найти значение выражения $\left(\frac{8}{27}\right)^{1\frac{1}{3}}$

а) $\frac{16}{81}$ б) 81.16 в) 16.81 г) $\frac{81}{16}$

Тест 3

1. Найти значение выражения $\sqrt[3]{-\frac{729}{125}}$

а) $\varnothing$ б) $\frac{9}{5}$ в) $-\frac{9}{5}$ г) $\frac{5}{9}$

2. Найти значение выражения $\sqrt[5]{32a^6 \times b^8}$

а) $2ab\sqrt[5]{(a \times b)^3}$ б) $2ab\sqrt[5]{a \times b^3}$ в) $32^{\frac{1}{5}} \times a^{\frac{6}{5}} \times b^{\frac{8}{5}}$ г) $2ab(a \times b^3)$

3. Найти значение выражения $\sqrt{100 \times 49:64}$

а) 7.08 б) 70.8 в) $\frac{70}{8}$ г) $\frac{35}{4}$

4. Найти значение выражения $\sqrt{3\frac{1}{16} \times 2\frac{1}{4}}$

а) 21.8 б) $\frac{21}{8}$ в) $\frac{8}{21}$ г) $6\frac{1}{2}$

5. Сравнить числа $\sqrt{81}$ и 9

а) $>$ б) $<$ в) $=$ г) $\neq$

6. Сравнить числа 4^5 и 5^4

а) $>$ б) $<$ в) $=$ г) $\leq$

7. Сравнить числа $-\sqrt{36}$ и $\frac{42}{7}$

а) $>$ б) $<$ в) $=$ г) $\geq$

8. Сравнить числа $\sqrt{1279}$ и $|1279|$

а) $>$ б) $=$ в) $\geq$ г) $<$

9. Сравнить числа $1 \cdot 10^{-3}$ и 0.01

а) $=$ б) $\geq$ в) $>$ г) $<$

10. Сравнить числа $\sqrt{a^2}$ и $|a|$

а) $=$ б) $<$ в) $>$ г) $\neq$

11. Расположите числа 1) 0.7 2) $\sqrt{0.5}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

в порядке возрастания.

а) 2), 1), 3) б) 1), 3), 2) в) 2), 3), 1) г) 3), 1), 2)

12. Расположите числа 1) $\sqrt{0.4}$ 2) 0.6 3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

в порядке возрастания.

а) 2, 1), 3) б) 1), 3), 2) в) 3), 2), 1) г) 1), 2), 3)

Тест 4

1. Представьте в виде степени с показателем, большим 1:
-25×125
а) $(-5)^5$ б) -5^5 в) 5^5 г) представить нельзя

2. Представьте число 0.0009 в виде квадрата или куба.
а) 0.3^3 б) 0.3^2 в) 0.03^2 г) представить нельзя

3. Найдите значение выражения $24a^4b^0$ при $a = \frac{1}{2}$, $b = 5$
а) 3.75 б) 0.75 в) 1.5 г) 3.5

4. При каком натуральном m верно равенство $a^{16} \cdot a^2 \cdot a^m = a^{32}$
а) 14 б) 0 в) 1 г) ни при каком

5. При каком натуральном b верно равенство $b^n : b^5 : b^8 = b^{13}$
а) 25 б) 17 в) 13 г) 26

6. При каком натуральном p верно равенство $((c^3)^p)^5 = c^{12}$
а) 1 б) 0 в) 2 г) 1.25

7. Вычислите $0.5\sqrt{0.04} - 4\sqrt{0.16}$
а) -1.7 б) 1.5 в) -1.5 г) 1.7

8. Выберите верное утверждение
а) $\sqrt{13} + \sqrt{12} < 5$ б) $\sqrt{13^2 - 12^2} = 5$
в) $\sqrt{13^2 + 12^2} = 5$ г) $\sqrt{13} - \sqrt{12} > 1$

9. При каких значениях x выражение имеет смысл $\sqrt{-x} + \sqrt{x} + \frac{2x}{x+1}$
а) $x \neq 0$ б) $x \neq -1$ в) $x < 0$ г) $x = 0$

10. Вычислите $-0.5\left(\sqrt{60}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\sqrt{90}\right)^2$
а) 20 б) -30 в) -40 г) 0

11. Упростите выражение $\frac{5}{x}\sqrt{\frac{x^2}{625}}$ $x < 0$
а) 0.2 б) -0.2 в) $0.2\sqrt{x}$ г) $0.2x$

12. Упростите выражение $10\sqrt{0.4} - (0.5\sqrt{160} + \sqrt{10})$
а) $\sqrt{10}$ б) $2\sqrt{10}$ в) $-\sqrt{10}$ г) $5\sqrt{10}$

Тест 5

1.При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{-2x}$

а) $x \geq 0$ б) $x < 0$ в) $x \leq 0$ г) $x > 0$

2. Внесите множитель под знак корня $\frac{a}{4}\sqrt{8a}$

а) $\sqrt{2a^2}$ б) $\sqrt{2a^3}$ в) $\sqrt{\frac{a^3}{2}}$ г) $\sqrt{\frac{a^2}{2}}$

3. вынесите множитель из под знака корня $\sqrt{-8b^3}$

а) $-2b\sqrt{-2b}$ б) $2b\sqrt{2b}$ в) $-2b\sqrt{2b}$ г) $2b\sqrt{-2b}$

4. Укажите верное равенство

а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2}$ б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

в) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$ г) верного равенства нет

5. Найдите значение выражения $-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 0.5^2$

а) $-1\frac{2}{9}$ б) $-1\frac{7}{12}$ в) $-1\frac{5}{12}$ г) $1\frac{11}{12}$

6. Упростите выражение $\frac{m^4\cdot(m^2)^6}{m^8}$

а) m^{10} б) m^4 в) m^2 г) m^8

7. Вычислите $\frac{9^3\cdot 27^4}{81^5}$

а) 3 б) 9 в) $\frac{1}{3}$ г) $\frac{1}{9}$

8.Вычислите значение выражения $\frac{(2a^2b^3)^3\cdot\left(0.5ab^2\right)^2}{\left(3a^2b^3\right)^4}$ при $a=1$ и $b=6\frac{3}{4}$

а) $\frac{1}{6}$ б) $\frac{1}{3}$ в) $\frac{1}{2}$ г) $\frac{2}{3}$

9. Найдите значение выражения А, если $-3x^4y^3 = A\cdot 9x^2y^6$ и $x=-2$, $y=\frac{2}{3}$

а) 6.5 б) -6.5 в) -4.5 г) -1.5

10. Найдите значение выражения $\left(3\sqrt{7.5}\right)^2 - \sqrt{3}\cdot\sqrt{0.12} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$

а) 67.4 б) 66.8 в) 28.4 г) 80.6

11. Упростите выражение $\sqrt{48}+\sqrt{75}-\sqrt{108}$

а) $3\sqrt{3}$ б) $2\sqrt{3}$ в) $5\sqrt{3}$ г) $-\sqrt{3}$

Задачи

1. Вычислите:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + 0.2^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$

б) $3\left(\frac{2}{\sqrt{10}+5} + \frac{5}{\sqrt{10}-2} - \frac{7}{\sqrt{10}}\right)$

в) $\frac{2^{-2} \cdot 5^{3} \cdot 10^{-4}}{2^{-3} \cdot 5^{2} \cdot 10^{-5}}$

г) $\left(6 - 4\left(\frac{5}{16}\right)^{0}\right)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \frac{3}{4}$

д) $\frac{2^{-2} + 2^{0}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 5 \cdot (-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}$

е) $\frac{(0.6)^{0} - (0.1)^{-1}}{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$

2. Сравните числа:

а) $(\sqrt{5}+2)$ и $\sqrt{17}$

б) $(\sqrt{7}+3)$ и $\sqrt{31}$

в) 5^{300} и 3^{500}

г) $7^{-\sqrt{12}}$ и $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2.8}$

д) $\left(\frac{10}{7}\right)^{2.7}$ и $(0.7)^{-\sqrt{8}}$

е) 3^{200} и 2^{300}

3. Вычислите значение выражения

а) $\frac{\sqrt[3]{b\sqrt{b}} + \sqrt{b\sqrt[3]{b}}}{4b\sqrt{b}\left(1+\sqrt[6]{b}\right)}$ при $b = \frac{5}{64}$

б) $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$ при $x = 4\frac{5}{7}$, $y = 5\frac{2}{7}$

Тема 2

Одночлен. Многочлен. Преобразование алгебраических выражений. Формулы сокращённого умножения. Разложение многочлена на множители

Мы подошли к одной из самых важных тем алгебры. Ведь без задания на преобразование алгебраических выражений не обходится практически ни один экзамен по математике. Сразу предупреждаю, такие преобразования сложны и требуют не только знаний, но и внимания, смекалки, терпения.

Для начала мы ознакомимся с понятиями «одночлен» и «многочлен».

Одночленом называется произведение двух или нескольких сомножителей каждый из которых есть либо число, либо буква, либо степень буквы.

Например, $6a^2x$, $2c$, $3b^3c^2$, $-10y^7$, $-7abc$.

Одночлены состоят из коэффициента (числового множителя) и буквенной части.

$6a^2x = 6$ (коэффициент) $\times\ a^2x$ (буквенная часть).

Отдельно взятое число, буква или степень буквы тоже рассматриваются как одночлен. Например, -5 (одночлен без буквенной части), c и c^5 (одночлены, в которых коэффициент равен 1).

Одночлены называются подобными, если они одинаковы или отличаются только коэффициентами.

Например, $7x^2y^3$, $-5x^2y^3$, $-x^2y^3$ – подобны.

Сложение двух или нескольких одночленов возможно только тогда, когда среди слагаемых имеются подобные.

Например, $6x^2y^2 + 9x^2y^2 - 7x^2y^2 = 8x^2y^2$.

Здесь мы суммировали коэффициенты, оставив буквенную часть без изменений. Такое действие называется приведением подобных членов.

Можно этот пример решить иначе, вынеся общий множитель за скобки:

$6x^2y^2 + 9x^2y^2 - 7x^2y^2 = (6+9-7)\ x^2y^2 = 8x^2y^2$.

Как мы видим, вынесение общего множителя за скобки – операция, идентичная приведению подобных членов.

Произведение двух или нескольких одночленов можно упростить лишь тогда, когда в них входят некоторые степени одних и тех же букв или числовые коэффициенты. При этом показатели степеней у соответствующих букв складываются, числовые коэффициенты перемножаются.

Пример: $-10x^2y \times 3x^3y^2 \times (-xy^3) = -10 \times 3 \times (-1)\ (x^2x^3x)\ (yy^2y^3) = 30x^6y^6$.

Для лучшего понимания, мы расписали это действие более подробно, хотя оно довольно прозрачное и может делаться устно.

Частное двух одночленов можно упростить, если делимое и делитель содержат некоторые степени одних и тех же букв или числовые коэффициенты. При этом показатель степени делителя вычитается из показателя степени делимого, а числовой коэффициент делимого делится на числовой коэффициент делителя.

Пример: $6x^3y^8z^7 : 2xy^5z^3 = 3x^2y^3z^4$.

Здесь числовой коэффициент делимого разделили на числовой коэффициент делителя, вычли показатели степени буквы x (3—1=2), буквы y (8—5=3) и буквы z (7—3=4).

При делении двух одночленов могут возникнуть две ситуации, которые требуют дополнительного пояснения.

1.Если показатели степени у некоторой буквы в делимом и делителе одни и те же, то в частное эта буква не войдёт (ведь нулевая степень любого числа равна единице).

Пример: $12x^3y^4 : 4x^3y^2 =3y^2$.

2.Если показатель степени какой-нибудь буквы в делимом меньше, чем показатель степени той же буквы в делителе, то вычитание даёт отрицательную степень этой буквы.

Пример: $8x^3y^5 : 2x^5y^3 = 4x^{-2}y^2 = (4y^2) / (x^2)$

При возведении одночлена в степень используется правило возведения степени в степень.

Пример: Возведём одночлен $2a^4b^2$ в четвертую степень.

$(2a^4b^2)^4 = 2^4 (a^4)^4 (b^2)^4 = 16a^{16}b^8$.

Не забывайте, что показатели степеней при данном правиле перемножаются.

Сумма одночленов называется многочленом.

Например, $4x^2y + 3a - 7b^2$ – многочлен, состоящий из суммы одночленов $4x^2$, $3a$, $-7b^2$.

При сложении и вычитании многочленов снова получается многочлен.

Пример. Сложим многочлены $x^3 + 2x^2y^2 - 7x^2 + y$ и $3x^3 - x^2y^2 + 5x^2 - 3y$.

Составим сумму многочленов, затем раскроем скобки и приведём в полученном многочлене подобные члены.

$(x^3+2x^2y^2-7x^2+y) + (3x^2- x^2y^2 +5x^2 - 3y) = x^3 +3x^3 +2x^2y^2 - x^2y^2 - 7x^2 +5x^2+ y - 3y = 4x^3 + x^2y^2 - 2x^2 - 2y$.

Здесь одновременно с раскрытием скобок мы сгруппировали подобные члены (для удобства вычислений).

Аналогично, производится и вычитание многочленов. Не забывайте, если перед скобкой стоит знак «минус», то все члены, заключаемые в скобки, меняют свой знак на противоположный.

Пример. $(4x^2y - 7x^3 +5y - 3) - (-2x^2y +5x^3- 3y +2) =4x^2y - 7x^3 +5y -3 +2x^2y -5x^3 +3y - 2 = 6x^2y - 12x^3 +8y - 5$.

Произведение многочленов.

Произведение одночлена и многочлена всегда можно представить в виде многочлена.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Схема: $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ (открытие скобок)

Например:

$-4x^3(2y^3-x+6)=-4x^3 2y^3+(-4x^3(-x))+(-4x^3\times 6)=-8x^3y^3+4x^4-24x^3$.

Мы выписали здесь промежуточные вычисления, хотя, в принципе, без этой записи можно обойтись.

Умножение многочлена на многочлен.

Произведение многочлена на многочлен равно сумме всех возможных произведений каждого одночлена одного из многочленов на каждый одночлен другого.

Схема: $(a+b)\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$

Пример. $(3x^2-6x+2)\times(4x^3-3x)=12x^5-9x^3-24x^4+18x^2+8x^3-6x=$

$=12x^5-24x^4-x^3+18x^2-6x$.

Существуют частные случаи умножения многочленов, которые называются формулами сокращённого умножения многочленов. Их желательно запомнить.

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (квадрат суммы)

2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (квадрат разности)

3. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ (разность квадратов)

4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (куб суммы)

5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (куб разности)

6. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ (сумма кубов)

7. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ (разность кубов)

Примеры: $(2ma^2+0.1nb^2)^2 = 4m^2a^4+0.4mna^2b^2+0.01n^2b^4$

$(5x^3-2y^3)^2 = 25x^6-20x^3y^3+4y^6$

$(0.2a^2b+c^3)(0.2a^2b-c^3) = 0.04a^4b^2-c^6$

$(5ab^2+2a^3)^3 = 125a^3b^6+150a^5b^4+60a^7b^2+8a^9$

Предлагаю вам самим узнать, какие формулы были использованы в этих примерах.

Деление многочленов.

1. Деление многочлена на одночлен.

Частное от деления многочлена на одночлен равно сумме частных, полученных от деления каждого слагаемого многочлена на одночлен.

Схема:

$$\frac{a+b+c}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}$$

Пример: $\frac{6a^3+2a^2b^2-7b^3}{ab}=\frac{6a^3}{ab}+\frac{2a^2b^2}{ab}-\frac{7b^3}{ab}=\frac{6a^2}{b}+2ab-\frac{7b^2}{a}$

2. Деление многочлена на многочлен в общем случае можно выполнить с остатком, подобно тому, как это делается при делении целых чисел.

Разделить многочлен P на многочлен Q значит найти многочлен M (частное) и N (остаток) удовлетворяющий двум требованиям: 1) должно соблюдаться равенство MQ+N=P и 2) степень многочлена N должна быть ниже степени многочлена Q.

Процесс нахождения частного M и остатка N аналогичен процессу деления с остатком многозначного числа на многозначное. Перед делением члены делимого и делителя располагается в порядке убывания степеней главной буквы.

Например, разделим $6x^3+2x^2-x+12$ на $3x^2-2x+6$

Запись деления:

1.Делим первый член делимого $6x^3$на первый член делителя $3x^2$. Результат $2x$ – первый член частного.

2.Умножаем полученный член на делитель $3x^2 - 2x + 6$, результат $6x^3 - 4x^2 + 12x$ записываем под делимым.

3.Вычитаем члены результата из соответствующих членов делимого, сносим следующий по порядку член делимого, получаем $6x^2 - 13x + 12$

4. Первый член остатка $6x^2$ делим на первый член делимого, результат 2 есть второй член частного.

5. Множим полученный второй член частного на делитель, результат $6x^2 - 4x + 12$ подписываем под первым остатком.

6. Вычитаем члены этого результата из соответствующих членов первого остатка, получаем второй остаток: -9x. Его степень меньше степени делителя. Деление закончено.

$$
\begin{array}{c|l}
6x^3 + 2x^2 - x + 12 & 3x^2 - 2x + 6 \\ \cline{2-2}
6x^3 - 4x^2 + 12x & 2x + 2 \\ \cline{1-1}
6x^2 - 13x + 12 & \\ \cline{1-1}
6x^2 - 4x + 12 & \\ \cline{1-1}
-9x &
\end{array}
$$

.

Целая часть: $2x + 2$

Остаток: $-9x$

Таким образом:

$$\frac{6x^3 + 2x^2 - x + 12}{3x^2 - 2x + 6} = 2x + 2 + \frac{-9x}{3x^2 - 2x + 6}$$

Приведём более сложный пример без дополнительных пояснений.

$$\begin{array}{r|l}
6t^4 - 2t^3 + 12t - 7 & 2t^2 + 4t + 6 \\ \cline{2-2}
6t^4 + 12t^3 + 18t^2 & 3t^2 - 7t + 5 \\ \cline{1-1}
-14t^3 - 18t^2 + 12t - 7 & \\
-14t^3 - 28t^2 - 42t & \\ \cline{1-1}
10t^2 + 54t - 7 & \\
10t^2 + 20t + 30 & \\ \cline{1-1}
34t - 37 & \\ \cline{2-2}
\end{array}$$

Целая часть: $3t^2 - 7t + 5$

Остаток: $34t - 37$

$$\frac{6t^4 - 2t^3 + 12t - 7}{2t^2 + 4t + 6} = 3t^2 - 7t + 5 + \frac{34t - 37}{2t^2 + 4t + 6}$$

Среди частных случаев деления многочлена на многочлен выделим делимость двучлена $x^m \pm a^m$ на $x \pm a$.

1. Разность одинаковых степеней двух чисел делится без остатка на разность этих чисел, т.е. $x^m - a^m$ делится на $x - a$

Примеры.

$(x^2-a^2): (x-a) = x+a$

$(x^3-a^3): (x-a) = x^2+ax+a^2$

$(x^4-a^4): (x-a) = x^3-ax^2+a^2x+a^3$

$(x^5-a^5): (x-a) = x^4-ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$

2. Разность одинаковых чётных степеней двух чисел делится не только на разность этих чисел, но и на их сумму т.е. $x^m - a^m$ при чётном m делится на $x + a$

Примеры.

$(x^2-a^2):(x+a)=x-a$

$(x^4-a^4):(x+a)=x^3-ax^2+a^2x-a^3$

$(x^6-a^6):(x+a)=x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5$

2а. Разность одинаковых нечётных степеней двух чисел не делится на сумму этих чисел.

Например, ни x^3-a^3, ни x^5-a^5 не делятся на x+a.

2б. Так как разность чётных степеней делится на x-a и на x +a, то она делится и на x^2-a^2.

Примеры.

$(x^4-a^4):(x^2-a^2)=x^2+a^2$

$(x^6-a^6):(x^2-a^2)=x^4+a^2x^2+a^4$

$(x^8-a^8):(x^2-a^2)=x^6+a^2x^4+a^4x^2+a^6$

3. Сумма одинаковых степеней двух чисел никогда не делится на разность этих чисел.

Например, ни x^2+a^2, ни x^3+a^3 не делятся на x-a.

4. Сумма одинаковых нечётных степеней двух чисел делится на сумму этих чисел.

Примеры.

$(x^3+a^3):(x+a)=x^2-ax+a^2$

$(x^5+a^5):(x+a)=x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4$

4а. Сумма одинаковых чётных степеней двух чисел не делятся ни на разность, ни на сумму этих чисел.

Например, x^6+a^6 не делится ни на x-a, ни на x+a.

Запомнить эти формулы необязательно, но уметь их применять необходимо.

Для удобства и упорядочивания вышеизложенных сведений можно составить такую таблицу.

Двучлен	Деление без остатка на		
	$x - a$	$x + a$	$x^2 - a^2$
$x^m - a^m$ (m - нечётное)	да	нет	нет
$x^m - a^m$ (m - чётное)	да	да	да
$x^m + a^m$ (m -нечётное)	нет	да	нет
$x^m + a^m$ (m - чётное)	нет	нет	нет

Возведение в степень n двучлена a+b.

$(a+b)^n=a^n+k_1\times a^{n-1}\times b+k_2\times a^{n-2}\times b^2+\ldots+b^n$ (эта формула называется биномом Ньютона).

Где коэффициенты k (биномиальные коэффициенты) определяются из треугольника Паскаля.

Степень n	Коэффициент
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1

Треугольник Паскаля – таблица бесконечная. Вершина таблицы и боковые стороны каждой строки имеют единицы. Остальные числа (в середине) равны сумме 2-ух чисел, которые находятся в предыдущей строке (над ними).Вы можете легко это проверить, а также потренироваться в составлении коэффициентов для степени 8. Теперь, зная секрет этой таблицы, вы можете без труда вычислить необходимые коэффициенты. Запомните только, что таблица начинается с нулевой степени.

Примеры.

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

Разложение многочлена на множители.

1 способ. Вынесение общего множителя за скобки.

Если все члены многочлена содержат в качестве множителя одно и то же выражение, его можно «вынести за скобки».

С этим способом мы косвенно ознакомились раньше. Приведём только пару примеров.

Примеры.

$4x^2y^3+8xy^2z=4xy^2\,(xy+2z)$

$9a^2b^2—3ab^2c+12abc^2=3ab\,(3ab-bc+4c^2)$

2 способ. Способ группировки.

Многочлен разбивается на несколько групп, в каждой из групп выносится за скобки общий множитель, после чего в скобках оказывается одинаковое выражение, которое в свою очередь выносится за скобки.

Примеры.

$5x^3+10x^2+3x+6=5x^2 (x+2) +3 (x+2) = (x+2) (5x^2+3)$

$20x^3—12y^3+8xy^2—30x^2y=20x^3—30x^2y+8xy^2—12y^3=10x^2 (2x-3y) +$

$4y^2 (2x-3y) = (2x-3y) (10x^2+4y^2)$

При этом способе важно иметь в виду, что выражение a-b можно всегда представить в виде – (b-a). Поэтому, если множители отличаются только знаками, их всегда можно сделать одинаковыми.

Например:

$6ab-2cb+9cd-27ad=2b (3a-c) +9d (c-3a) =2b (3a-c) -9d (3a-c) =$

$(3a-c) (2b-9d)$

3 способ. С помощью формул сокращённого умножения.

Примеры.

$9x^2—1= (3x-1) (3x+1)$

$4x^2+4x+1= (2x+1)^2$

4 способ. Разложение квадратного трёхчлена $ax^2+bx+c=$

$=a (x-x_1) (x-x_2)$

где x_1 и x_2-корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$

О решении квадратных уравнений мы поговорим позже.

А сейчас просто проиллюстрируем данный способ одним примером.

Пример.

$2x^2+13x-24=2(x-3/2)(x+8)=(2x-3)(x+8)$

Сначала решается квадратное уравнение

$2x^2+13x-24=0$ и находятся его корни $x_1=3/2$, $x_2=-8$

Потом по формуле делается разложение.

Как правило, при разложении многочлена приходится комбинировать вышеперечисленными способами, но начинать преобразования, если это возможно, с вынесения общего множителя за скобки.

Пример 1. Разложить на множители многочлен $36x^3+24x+4x$

Решение: Вынесем общий множитель 4x за скобки.

$36x^3+24x^2+4x=4x(9x^2+6x+1)$

Трёхчлен $9x^2+6x+1$ можно представить в виде квадрата двучлена:

$9x^2+6x+1=(3x+1)^2$

Таким образом, $36x^3+24x^2+4x=4x(3x+1)^2$

Пример 2. Разложить на множители многочлен $xy^3—3y^3+xy^2z-3y^2z$

Решение: Вынесем за скобки общий множитель y^2:

$xy^3—3y^3+xy^2z-3y^2z=y^2(xy-3y+xz-3z)$

Сгруппировав первый член со вторым и третий с четвёртым, разложим на множители многочлен: $xy-3y+xz-3z$

$xy-3y+xz-3z=y(x-3)+z(x-3)=(x-3)(y+z)$

Окончательно получим:

$xy^3 — 3y^3 + xy^2z - 3y^2z = y^2 (x-3) (y+z)$

Пример 3. Разложить на множители многочлен: $a^2 — 4ab - 9 + 4b^2$

Решение: Сгруппируем первый, второй и четвёртый члены многочлена. Полученный трёхчлен можно представить в виде квадрата разности.

$(a^2 — 4ab + 4b^2) - 9 = (a-2b)^2 — 9$

Полученное выражение не что иное, как разность квадратов:

$(a-2b)^2 — 9 = (a-2b)^2 — 3^2 = (a-2b-3) (a-2b+3)$

Таким образом, $a^2 — 4ab - 9 + 4b^2 = (a-2b-3) (a-2b+3)$.

Тестовые задания к теме 2

тест 1

1. Одночленом называется:

а) всякая перепенная

б) выражение, представляющее собой произведениечисел, переменных и их степеней

в) число, умноженное на некоторое другое число

г) число, представленное в каноническом виде

2. Какое выражение не является одночленом?

а) $2abcd$ **б)** 50 **в)** $-6x^6y^3$ **г)** $x-2$

3. Как представим одночлен:

а) в виде $a_n \cdot x_1^{k_1} + a_{n-1} \cdot x_2^{k_2} + \dots + a_0$

б) в виде $a \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$

в) в виде $a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + \dots + z$

г) в виде $2^k \cdot 3^n \cdot \dots \cdot 17^p \cdot \dots \cdot 1^g$

4. Стандартным видом одночлена называется:

а) произведение единственного числового множителя, стоящего на первом месте и степени любой переменной, входящей множителем только один раз

б) произведение коэффициента на переменную

в) произведение числовых значений и переменных

г) выражение вида $n \cdot x \cdot y^2 \cdot z^4 \cdot \dots \cdot a^k \cdot n^k$

5. Укажите одночлены стандартного вида:

а) $ax \cdot a$ **б)** $5a^2y^3c$ **в)** $a(x+b)$ **г)** $5x^3 \cdot 2y^2$

6. Привести подобные одночлены: 1) $6ab^3$ **2)** $-3a^2b^3c$ **3)** $c6b^3a^2$ **4)** $12c^4$

а) 1,2 б) 1,3 в) 1,4 г) 2,3

7. Привести подобные одночлены: 1) $2xyz$ **2)** z^2xy **3)** zx^2y **4)** $7xy$

а) нет таких б) 1,2 в) 1,3 г) 2,3

8. Многочленом называется:

а) общее выражение для данных одночленов

б) множество различных одночленов

в) сумма одночленов

г) произведение двух одночленов

9. Корнем многочлена называется:

а) корень чётной степени из многочлена

б) корень степени из многочлена при условии существования корня степени

в) число x_0**, если** $a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \dots + a_1x_0 + a_0 = 0$

г) значение переменной равное 0

10. Найти корни многочлена: $3a^2 - 4a + a^3$

а) 0 **б)** $a \in R$ **в)** $\varnothing$ **г)** $\{-4, 1, 0\}$

11. Найти корни многочлена: $5x^7 - 8x^5 + 15x^2 + 30x$

а) 0 **б)** $\{-1, 0\}$ **в)** $(-\infty, \infty)$ **г)** $\varnothing$

12. Найти корни многочлена: $(x^4 - 1)(x^6 + 1)$

тест 2

1. Формула сокращённого умножения $x^2 - y^2$

а) $(x + y)(y - x)$ б) $x^2 - 2xy + y^2$ в) $(x - y)(x + y)$ г) $(x - y)^2$

2. Формула сокращённого умножения $(x + y)^2$

а) $(x + y)(x - y)$ б) $x^2 + 2xy + y^2$ в) $x^2 + xy + y^2$ г) $x^2 + y^2$

3. Формула сокращённого умножения $x^3 + y^3$

а) $(x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$ б) $x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + y^3$

в) $(x + y)(x^2 + xy + y^2)$ г) $(x + y)^3$

4. Формула сокращённого умножения $(x + y)^3$

а) $x^3 + 2xy + y^3$ б) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ в) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

г) $x^3 + y^3$

5. Формула сокращённого умножения $(x - y)^2$

а) $x^2 - 2xy + y^2$ б) $x^2 - 2xy - y^2$ в) $(x - y)(x + y)$ г) $x^2 - y^2$

6. Формула сокращённого умножения $x^3 - y^3$

а) $(x - y)(x^2 - 2xy + y^3)$ б) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

в) $(x + y)(x^2 + xy + y^2)$ г) $(x - y)^2(x + y)$

7. Формула сокращённого умножения $(x - y)^3$

а) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ б) $x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3$

в) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ г) $(x + y)(x^2 - xy - y^2)$

8. Разложите квадратный трёхчлен на множители $3x^2 - 3$

а) $3(x - 1)^2$ б) $3(x + 1)(1 - x)$ в) $3(x - 3)(x + 3)$ г) $3(x - 1)(x + 1)$

9. Разложите квадратный трёхчлен на множители $x^2 - 16x + 15$

а) $(x - 1)(x - 15)$ б) $(x + 1)(x - 15)$ в) $(x + 1)(x + 15)$ г) $(x - 1)(x + 15)$

10. Для дробей укажите общий знаменатель $\frac{t - 2}{t^3(t + 2)}, \frac{t^2 - 7}{t(t + 2)^2}$

а) $t^3(t + 2)^2$ б) $t^3(t + 2)$ в) $t(t + 2)^2$ г) $t(t + 2)$

11. Для дробей укажите общий знаменатель $\frac{3}{2a^3b - 8a^2b^2}, \frac{15a}{12a^3b - 3a^4}$

а) $-6a^3b(4b - a)$ б) $6a^2b(a - 4b)$ в) $4a^2b(4b - a)$ г) $3a^3b(a - 4b)$

12. Для дробей укажите общий знаменатель $\frac{1}{2x - 3}, \frac{1}{3 + 2x}, \frac{1}{9 - 4x^2}$

тест 3

1.Заполните пропуски так, чтобы полученные неравенства были тождествами

$(x-2)(x-3)=x^2+(...)x+(...)$

а) 1, − 6 б) 6, − 1 в) − 5, 6 г) 5, − 6

2. Заполните пропуски так, чтобы полученные неравенства были тождествами

$(x+7)(x+1)=x^2+(...)x+(...)$

а) 7, 8 б) 7, − 8 в) 8, 7 г) − 7, − 8

3. Заполните пропуски так, чтобы полученные неравенства были тождествами

$x^2+7x+10=(x+2)(x+...)$

а) 5 б) − 5 в) 9 г) 3

4. Заполните пропуски так, чтобы полученные неравенства были тождествами

$x^2-5x+6=(x-2)(x-...)$

а) − 3 б) − 5 в) − 1 г) 3

5. Заполните пропуски так, чтобы полученные неравенства были тождествами

$x^2+8x+15=(x...)(x...)$

а) 3, 5 б) − 5, − 3 в) 5, − 3 г) − 5, 3

6. Выполните деление многочлена $(a^2-9):(a-3)$

а) $a-3$ б) $a+3$ в) $3-a$ г) $-a-3$

7. Выполните деление многочлена $\dfrac{a^4-16}{a+2}$

а) a^3-8 б) $(a-2)(a+2)$ в) $(a+2)(a^2+4)$ г) $(a-2)(a^2+4)$

8. Выполните деление многочлена $(x^6-y^6):(x^2+xy+y^2)$

а) $(x^2-y^2)xy$ б) $(x-y)(x^3+y^3)$ в) x^4-y^4 г) $(x+y)(x^3-y^3)$

9. Выполните деление многочлена $(x^4-y^4):(x-y)$

а) $(x+y)^3$ б) x^3+y^3 в) $(x+y)(x^2+y^2)$ г) $(x-y)(x+y)^2$

10. Разложите на множители выражение $18x^3y^5-24x^4y^3-30x^2y^6$

а) $6x^2y(3xy^4-4x^2y-5y^5)$ б) $6xy^2(3xy^2-4x-5y^4)$

в) $6x^2y^3(3x^2y^2-4x^2-5y^3)$ г) $6x^2y^3(3xy^2-4x^2-5y^3)$

11. Упростите выражение $(2x-5y)(4x+3y)-(x+2y)(5x-6y)$

а) $3x^2+18xy-27y^2$ б) $3x^2-18xy-3y^2$ в) $3x^2-16xy-3y^2$ г) $3x^2-18xy-27y^2$

12. Известно, что $(3x+a)(x-4)=3x^2-2x-4a$. Найдите значение a и вычислите значение выражения $3x^2-2x-4a$ при $x=-2$

а) − 18 б) − 24 в) − 20 г) 18

тест 4

1. Найдите многочлен M ,если известно, что $x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x^2 - 2) \cdot M$, и вычислите значение многочлена M при $x = 1$

а) 4 б) -4 в) -1 г) -2

2. Расскройте скобки $\left(\frac{x}{2} - 0.4y\right)^2$

а) $\frac{x^2}{4} - 0.8xy + 0.16y^2$ б) $\frac{x^2}{4} - 0.4xy + 1.6y^2$

в) $\frac{x^2}{4} - 0.2xy + 0.16y^2$ г) $\frac{x^2}{4} - 0.4xy + 0.16y^2$

3. Упростите выражение $\left(\frac{y}{3} + 0.5x\right)\left(0.5x - \frac{y}{3}\right)$

а) $2.5x^2 - \frac{y^2}{9}$ б) $0.25x^2 - \frac{y^2}{9}$ в) $\frac{y^2}{9} - 0.25x^2$ г) $\frac{y^2}{9} + 0.25x^2$

4. Известно, что $\left(\frac{x}{4} - 3y^2\right)^2 = \frac{x^2}{16} + bxy^2 + 9y^4$. Найдите число b.

а) 2.5 б) -2.5 в) -1.5 г) 1.5

5. Разложите на множители выражение $\frac{25x^6}{9} - 0.0016y^4$

а) $\left(\frac{5}{3}x^3 - 0.4y^2\right)\left(\frac{5}{3}x^3 + 0.4y^2\right)$ б) $\left(\frac{5}{3}x^2 - 0.4y^2\right)\left(\frac{5}{3}x^2 + 0.4y^2\right)$

в) $\left(\frac{5}{3}x^3 - 0.04y^2\right)\left(\frac{5}{3}x^3 + 0.04y^2\right)$ г) разложить нельзя

6. Разложите на множители выражение $(x - 2)^3 - 1$

а) $(x - 3)(x^2 - 3x + 3)$ б) $(x - 3)(x^2 - 6x - 3)$ в) $(x - 3)(x^2 - 5)$ г) разложить нельзя

7. Разложите на множители выражение $(x - 5)^2 + (x - 5)(x + 5)$

а) $2x(x + 5)$ б) $x(x - 5)$ в) $2x(x - 5)$ г) $(x - 5)(2 + x)$

8. Упростите выражение $\left(a^2 - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^2b}{2} + a^4\right)$

а) $a^6 - \frac{b^3}{8}$ б) $a^6 + \frac{b^3}{8}$ в) $a^4 - \frac{b^2}{4}$ г) $a^6 + \frac{b^3}{4}$

9. Упростите выражение $(a - 3)^2 - (2 - a)^2$

а) $2a - 5$ б) $5 - 2a$ в) $5 + 2a$ г) $-5 - 2a$

10. Упростите выражение $6a - (4a - 3)^2$

а) $8a^2 + 18a - 9$ б) $8a^2 - 12a + 6$ в) $16a^2 - 30a + 9$ г) $-16a^2 + 30a - 9$

11. Разложите на множители выражение $9x^2 - 4y^2 + 4y - 1$

а) $(3x - 2y - 1)(3x + 2y + 1)$ б) $(3x - 2y)(3x + 2y)(4y - 1)$

в) разложить нельзя г) $(3x - 2y + 1)(3x + 2y - 1)$

12. Разложите на множители выражение $x^3 + x^2 - 4x - x$ и решите уравнение

$x^3 + x^2 - 4x - x = 0$

а) $-2, 2$ б) $-2, -1, 2$ в) 2 г) $-1, 1$

тест 5

1.Упростите выражение $(7x-3)(2x-5)-2(4x-3)^2$

а) $-18x^2-7x-3$ б) $18x^2-7x+3$ в) $-18x^2+7x+3$ г) $-18x^2+7x+3$

2. Найдите значение a и m ,при которых выполняется равенство

$2x^3+9x^2+a=(mx-3)(x+3)^2$. Запишите сумму $a+m$.

а) -25 б) -30 в) -20 г) -36

3. Расскройте скобки в выражении $(a-2b-3c)^2$

а) $a^2+4b^2+9c^2$ б) расскрыть нельзя в) $a^2-4b^2-9c^2-4ab-6ac+12bc$

г) $a^2-4ab+b^2-6ac+12bc+9c^2$

4. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\dfrac{3x+6}{1.7-2x}$

а) $x\neq-2$ б) $x\neq0.85$ в)$x\neq1\dfrac{3}{17}$ г) $x\neq-0.85$

5. Сократите дробь $\dfrac{3a^2-27}{18-6a}$

а) $\dfrac{a+3}{2}$ б) $-\dfrac{a+3}{2}$ в) $-\dfrac{a}{2}-1.5$ г) $\dfrac{-a+3}{2}$

6. Сократите дробь $\dfrac{x^2+y^2+2xy}{2x^2+2y^2}$

а) $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ б) $\dfrac{x+y}{2}$ в) xy г) сократить нельзя

7. Упростите выражение $\dfrac{(a-b)(a+b)-(a-b)^2}{ab-b^2}$

а) $-\dfrac{2}{b^2}$ б) $\dfrac{2}{b^2}$ в) 2 г) $\dfrac{2a}{a-b}$

8. Упростите выражение $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}$

а) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ б) -1 в) $\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$ г) $\dfrac{a-b}{a+b}$

9. Упростите выражение $\dfrac{4-a}{a-3}+\dfrac{2a-5}{3-a}$

а) $\dfrac{a-1}{a-3}$ б) 3 в) -3 г) $\dfrac{1-3a}{a-3}$

10. Упростите выражение $4-\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{3}{x}$

а) $\dfrac{1}{x}$ б) $\dfrac{4x^2-6}{x^2+2x}$ в) $\dfrac{4x-3}{x^2+2x}$ г) $\dfrac{4x^2+6x+6}{(x+2)x}$

тест 6

1.Выполните умножение $\frac{7x^2}{3-x} \cdot \frac{x^2-9}{14x^3}$

а) $\frac{3-x}{2x}$ б) $\frac{x-3}{2x}$ в) $\frac{x+3}{7x}$ г) $-\frac{x+3}{2x}$

2. Выполните деление $\frac{x^2+10x+25}{x^2+5x} : \frac{x^2-25}{x^3}$

а) $\frac{x^2}{x-5}$ б) $-\frac{x}{5}$ в) $\frac{x+5}{x-5}$ г) $\frac{x}{x+5}$

3. Выполните действия $(x+x^2):\left(1+\frac{1}{x}\right)$

а) $\frac{x}{x+1}$ б) x^2 в) x г) $x+1$

4. Найдите значение выражения $\frac{a^2+3ab}{b^2}$, если известно, что $2a+3b=0.6(5a+3b)$

а) 8.2 б) 1.28 в) 3.6 г) 5.04

5. Преобразуйте в одночлен стандартного вида $24a^3b^5c^5 : (-0.8ab^3c^5)$

а) $-30a^2b^2c$ б) $-30a^2b^2$ в) $3a^2b^2$ г)

6. Выберите одночлены, степень которых равна 7:

1) $7a^5$ 2) $22b^7$ 3) $-4c^3d^4$ 4) $6aba$ 5) $-2ab^6$ 6) $-\frac{1}{3}abc^4$

а) 2,5 б) 2,3,5 в) все г) 2,3

7. Представьте в виде квадрата одночлена $81a^4b^6$

а) $\left(9a^2b^4\right)^2$ б) $\left(9a^2b^3\right)^2$ в) $\left(27a^2b^3\right)^2$ г) $\left(9a^3b^5\right)^2$

8. Найдите степень многочлена $4.5x^6+3xy^3-2.5x^2-6xy^6+y^2$

а) 8 б) 6 в) 7 г) 5

9. Какое из данных равенств является тождеством?

а) $(7a-b)^2=49a^2-b^2$ б) $(7a-b)^2=49a^2-7ab-b^2$

в) $(7a-b)^2=b^2-14ab+49a^2$ г) $(7a-b)^2=49a^2+14ab+b^2$

10. Представьте в виде квадрата двучлена $0.25x^2+y^2-xy$

а) $(y+0.5x)^2$ б) $0.25(2y-x)^2$ в) $(y-0.5x)^2$ г) $0.5(x+y)^2$

11. Представьте в виде произведения $9p^2-(4p^2-3)^2$

а) $(3p-4p^2+3)(4p^2+3p-3)$ б) представить нельзя

в) $(-p+3)(7p-3)$ г) $p(1-p+3)(1-p-3)$

12. Упростите выражение $7(y-a)(a+y)+7a^2$

а) $7y^2+14ay+14a^2$ б) $7y^2$ в) $7y^2-14a^2$ г) $14y^2$

ЗАДАЧИ

Упростите выражения:

1. $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}-\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$ 2. $\left(a+\dfrac{ab}{a-b}\right)\left(\dfrac{ab}{a+b}-a\right):\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

3. $\left[\dfrac{a+3b}{(a-b)^2}+\dfrac{a-3b}{a^2-b^2}\right]:\dfrac{a^2+3b^2}{(a-b)^2}$ 4. $\left(m+n-\dfrac{4mn}{m+n}\right):\left(\dfrac{m}{m+n}-\dfrac{n}{n-m}-\dfrac{2mn}{m^2-n^2}\right)$

5. $\left[\dfrac{1}{(m+n)^2}\left(\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)+\dfrac{2}{(m+n)^3}\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)\right]m^2n^2$ 6. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$

7. $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\dfrac{2y}{x+y}-\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ 8. $\left(6a^2+5a-1+\dfrac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\dfrac{3}{a+1}\right)$

9. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{(1-x^2)^{-1}}+\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{x^{-2}}\right]:\left(\dfrac{x^{-2}}{1+x^{-2}}\right)^{-1}$ 10. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2c}{ab}\right)(a+b+2c):\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}-\dfrac{4c^2}{a^2b^2}\right)$

11. $\dfrac{2b+a-\dfrac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\dfrac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}$ 12. $\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{2}}-\dfrac{a^2+4}{a^3-\sqrt{8}}\right):\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}+1+\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right)^{-1}$

13. $\dfrac{\sqrt[3]{a^5b^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{a^{-1}}}}{\left(a^2\cdot\sqrt[5]{ab^3}\right)^2}$ 14. $\dfrac{\left[\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{\left(\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{b}}\right)^6}$

15. $\left(\dfrac{1}{2+2\sqrt{a}}+\dfrac{1}{2-2\sqrt{a}}-\dfrac{a^2+1}{1-a^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$ 16. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$

17. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{1-x}+\dfrac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{x}}$ 18. $\left(\dfrac{1}{m-\sqrt{mn}}+\dfrac{1}{m+\sqrt{mn}}\right)\cdot\dfrac{m^3-n^3}{m^2+mn+n^2}$

19. $\dfrac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{1-a^2}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}$ 20. $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right):\left[\dfrac{3}{\sqrt{1-a^2}}+1\right]$

21. $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{(1-x)(1-x^{-\frac{1}{2}})}{1+\sqrt{x}}$ 22. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$

23. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 24. $\dfrac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}:\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}$

Тема 3

Уравнение, общие сведения. Равносильные уравнения. Основные приёмы решения уравнений. Классификации уравнений. Решение простейших линейных и квадратных уравнений, а также уравнений приводящихся к квадратным

Понятие уравнения является одним из основных понятий алгебры. От того как вы освоите решение уравнений зависит ваше дальнейшее продвижение по усвоению более сложного материала. Поэтому отнеситесь к этой теме с должной серьёзностью.

Итак, **равенство, содержащее переменную, называется уравнением.** Корни уравнения – значение переменных, обращающие уравнение в верное равенство.

Например, корнем уравнения $\frac{2}{3+x} = \frac{1}{2}x$ есть число 1, так как при $x = 1$ оба выражения $\frac{2}{3+x}$ и $\frac{1}{2}x$ образуют тождество.

Уравнение может иметь один, два, три и т.д корня, бесчисленное множество корней или не иметь их вовсе.

Упомянутое выше уравнение имеет один корень.

Уравнение (6-x) (12-x) (3+x) = 0 имеет три корня: 6, 12, -3. Действительно, каждое из этих чисел обращает в нуль один из множителей произведения (6-x) (12-x) (3+x) и само произведение соответственно.

Конец ознакомительного фрагмента.