

И. С. Алексеев
А. Д. Смирнова
Д. Н. Овсяницкий

**От занятий в Летней
научной школе ЛНМО
к созданию инженерных
проектов и исследований
в области математики
и биологии**

Сборник методических статей



ФОНД
ПРЕЗИДЕНТСКИХ
ГРАНТОВ



ЛНМО

**Дмитрий Николаевич Овсяницкий
Анастасия Денисовна Смирнова
Илья Сергеевич Алексеев**

**От занятий в Летней научной
школе ЛНМО к созданию
инженерных проектов
и исследований в области
математики и биологии.**

Сборник методических статей

*http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=51938338
ISBN 9785449858610*

Аннотация

Лаборатория непрерывного математического образования ежегодно проводит Летнюю научную школу и научные семинары в течение учебного года. Сборник содержит методические наработки преподавателей ЛНМО, связанные с системным принципом организации проектной и исследовательской деятельности.

Содержание

Научные исследования школьников в области математики и компьютерных наук. Опыт интеграции программ Летней научной школы и Системы научных семинаров и спецкурсов ЛНМО	7
Взаимодействие ученика и научного руководителя	12
Подготовка теоретической базы для создания школьником научного исследования	15
Подбор исследовательских задач	18
Конец ознакомительного фрагмента.	23

**От занятий в Летней
научной школе
ЛНМО к созданию
инженерных проектов
и исследований в области
математики и биологии
Сборник
методических статей**

**Илья Сергеевич Алексеев
Анастасия
Денисовна Смирнова
Дмитрий Николаевич
Овсяницкий**

Редактор Максим Анатольевич Клеверов

Редактор Мария Вячеславовна Чистякова

Дизайнер обложки Анастасия Денисовна Смирнова

© Илья Сергеевич Алексеев, 2020

© Анастасия Денисовна Смирнова, 2020

© Дмитрий Николаевич Овсяницкий, 2020

© Анастасия Денисовна Смирнова, дизайн обложки, 2020

ISBN 978-5-4498-5861-0

Создано в интеллектуальной издательской системе Ridero

**Научные исследования
школьников в области
математики и компьютерных
наук. Опыт интеграции
программ Летней научной
школы и Системы научных
семинаров и спецкурсов ЛНМО
Алексеев Илья Сергеевич**

Лаборант-исследователь
Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ
Преподаватель математического направления
Летней научной школы ЛНМО
Научный руководитель
Системы научных семинаров
и спецкурсов ЛНМО

Настоящая статья посвящена организации научно-исследовательской деятельности в области математики и программирования ребят, обучавшихся в Летней научной школе Лаборатории непрерывного математического образования и в Системе научных семинаров и спецкурсов ЛНМО и до-

стигших значительных успехов в научной деятельности.

Создание школьником научного исследования можно разделить на несколько этапов, которые подразумевают подготовку теоретической базы, подбор и постановку исследовательской задачи, проведение исследовательского процесса, написание научной статьи и распространение полученных результатов путем публикации работы, и в итоге – выступления на научных конференциях и семинарах.

Этап теоретической подготовки, являясь одним из наиболее трудоемких, определяет тематику будущего исследования и предшествует началу исследовательского процесса. Предполагается, что необходимую теорию школьник осваивает на соответствующем спецкурсе. Например, ЛНМО проводит математическую смену Летней научной школы (ЛМШ), в рамках которой школьники 7—11 классов в течение трёх недель слушают курсы по математике и компьютерным наукам с последующей сдачей экзаменов. К чтению лекций приглашаются специалисты из соответствующих областей. Как правило, каждый ребенок прослушивает четыре курса, читающихся ежедневно. Для того, чтобы сделать процесс обучения в ЛМШ наиболее продуктивным, тематика курсов выбирается таким образом, чтобы установить фундамент в математическом образовании школьника. К примеру, будущие девятиклассники ЛНМО в ЛМШ помимо стандартного курса алгебры и анализа прослушивают курсы по основам линейной алгебры и теоретико-множественной то-

пологии. Доступность продвинутых математических курсов для школьников обусловлена тем, что ученики ЛНМО уже в 7 и 8 классах осваивают математические основы, такие как теорию множеств и теорию групп. Тематика курсов для старшеклассников в ЛМШ имеет более специфический характер, поскольку предполагается, что старшеклассники имеют представление о предлагаемых научными руководителями темах будущего научного исследования. Последнее делает целесообразным организацию курсов, приносящих специализированные знания. Подразумевается, что подобные курсы имеют достаточно общий характер, являются полезными и интересными для школьников. В 2019 году в ЛМШ были прочитаны следующие курсы: «Теоретическая информатика», «Введение в алгебру и анализ», «Алгоритмы и структуры данных», «Введение в математику» (авторский курс), «Топология», «Теория вычислимости», «Введение в линейную алгебру», «Введение в неравенства», «Теория функций многих переменных», «Введение в теорию групп», «Теория Галуа», «Введение в геометрическую топологию», «Современная теория чисел», «Теория категорий», «Многопоточное программирование». Последние пять из них можно отнести к списку тех, которые были включены в учебный план ЛМШ с расчётом на будущее использование в научных работах школьников.

Основной источник новых знаний для школьника в рамках Системы научных семинаров ЛНМО – это теоретиче-

ские семинары (спецкурсы). Например, в 2019—2020 учебном году в ЛНМО были организованы следующие курсы: «Линейная алгебра», «Разработка интерфейсов», «Гомологическая алгебра», «Дифференциальные уравнения», «Введение в теорию групп», «Функциональный анализ», «Машинное обучение». Знания, которые предлагаются на теоретическом семинаре, необходимы для успешного участия школьников в исследовательских семинарах. Например, все дети (пять человек) после прохождения курса «Функциональный анализ» продолжили научную работу на одноимённом исследовательском семинаре и на семинаре «Геометрическая теория групп» с последующим выступлением на Балтийском научно-инженерном конкурсе.

Исследовательские семинары ЛНМО – это научные семинары, на которых школьники обсуждают исследовательские задачи по математике и компьютерным наукам, выступают с докладами по соответствующей тематике, объединяются для решения задач, изучают передовые результаты ученых. Именно на этих семинарах под надзором научного руководителя проводятся исследовательские процессы. Например, в 2019—2020 учебном году в ЛНМО были организованы следующие исследовательские семинары: «Вычислительная геометрия», «Семинар по решению задач Турнира юных математиков», «Топологическая теория графов», «Теория гомологий», «Введение в топологию», «Бесконечные группы», «Топология и геометрия поверхностей», «Алгебраическая

теория полугрупп», «Алгебраическая топология», «Комбинаторика систем корней», «Геометрическая теория групп», «Функциональный анализ».

В статье будут описаны основные аспекты и стратегии ведения научного исследования, принятые на научных семинарах ЛНМО.

Взаимодействие ученика и научного руководителя

Формат работы научного руководителя и ребенка во многом зависит от уровня подготовки последнего. В том случае, если ребёнок является начинающим, зависимым от своего руководителя исследователем в соответствующей области науки, научный руководитель должен давать тому четкие указания о том, что делать, когда и как. В таком формате руководителем назначаются конкретные цели и простые методы их достижения, а подход к предмету предполагается максимально строгим и организованным. В случае, если ребенок уже вовлечен в исследование, заинтересован в получении знаний и готов решать конкретные задачи, руководитель должен готовить ребенка к самостоятельности и помогать ему развивать свои навыки. В таком формате руководитель объясняет и обосновывает каждое задание, убеждает ребенка в его ценности, учитывает мнение ребенка. В отличие от предыдущего формата, в данном случае связь между ребёнком и научным руководителем является двусторонней. Предполагается, что каждый ребёнок проходит два этапа обучения, описанных выше. Взаимодействие ребенка и научного руководителя подразумевает регулярные встречи, обсуждение продвижений ребёнка в решении поставленных задач и установку конкретных временных сроков вы-

полнения последних. Итого, основная задача научного руководителя – корректировать действия ребенка, обеспечивать его необходимыми знаниями, консультировать и направлять.

В рамках исследовательского семинара «Геометрическая теория групп» под руководством Руслана Тимуровича Магдиева проводились еженедельные занятия, на которых коллективы старшеклассников решали исследовательские задачи, относящиеся к одной и той же области математики. Среди ребят были как те, кто находился на первом этапе обучения и для кого научная работа была впервой, так и те, кто уже хорошо ориентировался в теории и был заинтересован в проведении собственного исследования. Стоит отметить, что последние помогали первым в освоении дисциплины, и такое взаимодействие способствовало повышению командного духа. Тем не менее, немаловажную роль играл авторитет Руслана Тимуровича, его навыки объяснения и донесения мысли, способность координирования работы ребят и корректирования направления их мыслей при решении исследовательских задач.

Допускается проведение дистанционных занятий. Например, специально для исследовательского семинара «Теория гомологий» руководителем были записаны видеолекции [4], которые позволили школьникам пройти экспресс-курс по теории векторных пространств, который является прerreквизитом к теории гомологий. Материалы экспресс-курса

обсуждались на дополнительных занятиях.

Подготовка теоретической базы для создания школьником научного исследования

Как правило, научное исследование подразумевает специализацию, требующую дополнительных знаний из соответствующей области науки. Необходимая теоретическая база подготавливается руководителем и преподносится ребенку, например, в формате курса лекций или практических занятий. Последний формат подразумевает, что ключевые идеи и результаты школьником переоткрываются. Исследовательская задача может быть поставлена как до освоения основ дисциплины, так и после. Теоретический материал подбирается таким образом, чтобы, с одной стороны, освоить использование специальных методов и техник для решения задачи, а с другой стороны, чтобы для ребёнка открылась ясная картина того, как устроены основания соответствующей области науки, в чем состоят мотивировки исследования и его дальнейшие перспективы. Вынося в будущем результаты по проведенным исследованиям на защиту, школьник подтверждает, что он ознакомлен с сопутствующей теорией на должном уровне строгости. Задача руководителя, в частности, состоит в том, чтобы ознакомить ребёнка с современным состоянием исследуемого вопроса.

Так весной 2019 года Руслан Тимурович Магдиев предложил Артёму Семидетнову совместную работу, являющуюся продолжением его собственной школьной научной работы под названием «Геометрия геодезических в дискретной группе Гейзенберга», которая относится к теории групп и римановой геометрии. Участие в подобном исследовании предполагает серьезные теоретические пререквизиты, и даже для понимания постановки задачи от ребёнка требуется знание основ теории групп. Необходимую теоретическую базу Артем получил в Летней математической школе, прослушав курсы «Введение в теорию групп» и «Введение в геометрическую топологию». Знания, обретенные Артёмом на первом из них, позволили ему ознакомиться с результатами, полученными в прошлом Русланом Тимуровичем, и приступить к изучению более широкого класса объектов. Навыки работы с римановыми многообразиями, обретенные на занятиях по геометрической топологии, в будущем позволили Артёму обнаружить новый подход к описанию рассматриваемых объектов. Перечислим несколько понятий, которые были использованы в научном исследовании Артёма и были отработаны на семинаре «Геометрическая теория групп»: задание групп образующими и соотношениями, нильпотентные и разрешимые группы, дискретные изопериметрические задачи, римановы многообразия, однородные и изотропные геометрии, группы Ли.

Стоит выделить исследование десятиклассника Петра Ба-

ринова «Структура сингулярных обобщенных функций с точечными носителями», выполненное под руководством Петра Алексеевича Куликова:

«Математическая физика изучает решение дифференциальных уравнений высших порядков. В частности, если рассмотреть линейный дифференциальный оператор, то подобрав нужные коэффициенты он может стать, например, оператором Лапласа. Мы изучили поведение решения линейного дифференциального уравнения на прямой при условии, что у решения есть не более чем степенная особенность в нуле. А именно, мы нашли другое решение для этого дифференциального оператора, которое не имеет особенностей, и нашли его связь с первым решением».

Необходимая теоретическая база осваивалась в течение всего 2019 года на следующих семинарах ЛНМО: «Теория меры и категорий», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ». Перечислим некоторые понятия, использованные в итоговой научной статье: дифференциальные уравнения, ряды Фурье, обобщенные функции и их регуляризация, меры Лебега и Стильеса.

Подбор исследовательских задач

Исследовательские задачи, которые предлагаются детям, должны быть таковы, что задача

- частично решена научным руководителем, при этом содержит части без какого-либо известного решения;

- доступна для ребёнка, то есть должна быть уверенность в том, что некоторая элементарная исследовательская работа может быть сделана.

- зачастую задача предполагает изучение новой теории.

Например, на семинаре «вычислительная геометрия» под руководством Бориса Алексеевича Золотова было проведено исследование, основанное на одной из задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

«Существует много различных характеристик фигур на плоскости, таких как диаметр и площадь, но можно заметить, что среди них нет ни одной простой и хорошо изученной характеристики, которая могла бы отличить широкие и длинные фигуры от фигур, которые такими не являются. Поэтому я изучила новую характеристику фигур на плоскости, которая называется миаметр».

Автор итогового решения (Дойникова Екатерина, ученица 8 класса) на Балтийском научно-инженерном конкурсе получила Диплом II степени и Специальную премию с работой «Миаметры». Другому ученику Бориса Алексееви-

ча (Пакульневичу Константину, 9 класс) на основе знаний, полученных по результату прохождения курса «топология» ЛМШ, для некоторого специального класса объектов удалось улучшить передовой геометрический алгоритм, который обсуждался на семинаре «Вычислительная геометрия».

«Работа основана на теорема Александра и алгоритме Чена-Хана. Теорема Александра дает достаточные и необходимые условия существования выпуклого многогранника (причем единственного) для заданной развертки. Из квадратов можно составить бесконечно много развёрток, удовлетворяющих условиям теоремы Александра. Однако некоторые из этих развёрток оказываются изоморфны – а именно, что им соответствует один и тот же многогранник, с точностью до гомотетии. Более того, с использованием формулы Гаусса – Бонне несложно показать, что у каждого многогранника, получаемого при склейке квадратов, будет не более восьми вершин. В результате работы построен алгоритм проверки изоморфности склеек из квадратов. Алгоритм расширен для других правильных многоугольников».

Работа «Проверка изоморфности склеек из правильных многоугольников» была отмечена на Балтийском научно-инженерном конкурсе Дипломом лауреата премии учительского жюри. Перечислим несколько понятий, которые были использованы в исследовании и были отработаны на семинаре: Link-cut Trees, диаграммы Вороного, формула Гаусса-Бонне.

Ключевую роль при подборе задач играет работа с лите-

ратурой. Новизна проблематики подразумевает, что научному сообществу неизвестно её полное решение. Под полнотой решения может, например, иметься в виду решение некоторой сверхзадачи, которая выбирается в качестве ориентира либо до начала исследования, либо в процессе исследования. Вопрос считается изученным научным сообществом, если либо имеется публикация (заметки, статьи, монографии, книги и т.п), используя результаты которой, можно напрямую получить решение этой задачи, либо решение следует из результатов некоторой общей теории и хорошо известно специалистам. Имеется исключение из этого правила, связанное с тем, что ученые не всегда публикуют открытия, которые были получены ими в процессе исследования. Поэтому проверить на практике, была ли некоторая задача кем-либо решена, непросто, и для доказательства новизны проблематики необходимо как опубликовать на всеобщее обозрение результаты работы, так и привлечь к ней внимание научного сообщества. Это приводит как к необходимости раннего обнародования условий задачи, так и к последующей публикации решения ребёнка.

К примеру, источником некоторых научных работ, выполненных на исследовательском семинаре «Геометрическая теория групп», послужила недавно опубликованная книга [2] и сборник открытых задач [3], авторство которых принадлежит специалистам в соответствующих областях.

На семинаре «Теория гомологий» под руководством к.ф.-

м. н. Сергея Олеговича Иванова было проведено исследование, результатом которого является обнаружение нового подхода к диагностике колоректального рака:

«Работа посвящена изучению гистологических изображений (WSI – Whole-Slide Imaging) при помощи методов топологического анализа данных. В частности, изображений рака толстой кишки. Основной характеристикой изображения для нас является персистентная энтропия, которая извлекается из нулевых симплициальных персистентных гомологий изображения. Наша цель – показать, что персистентная энтропия может быть полезна для компьютерной диагностики различных видов рака, в том числе колоректального. В этой работе нами реализован алгоритм вычисления персистентной энтропии, проведен анализ набора патчей WSI-изображений здоровой ткани и колоректального рака. В энтропии изображений здоровой ткани и рака были найдены существенные различия. Данные наблюдения могут стать основой нового метода диагностики рака».

Авторы решения (Каданцев Георгий и Синицын Александр, ученики 11 класса) с работой «Персистентные гомологии и анализ гистологических данных» на Балтийском научно-инженерном конкурсе получили награды «Диплом I степени и Главная премия <<Совершенство как надежда>>» и «Главная премия (поездка на Regeneron ISEF)». Результаты общения со специалистами из комитета жюри подтвердили новизну решаемой задачи.

Существует несколько исследовательских направлений, актуальность которых постулируется научным сообществом. Среди них: установление связей между разными разделами науки, заполнение пробелов в научных публикациях и нахождение истины, поиск научных аномалий и другие. Стоит отметить, что исследовательская задача не обязана быть актуальной, однако, она должна вызывать интерес у ученых.

К примеру, ценность научной работы Артёма Семидетнова, которая называется «Геометрия свободных нильпотентных групп», состоит в том, что класс рассматриваемых в ней объектов включает в себя, с одной стороны, дискретную группу Гейзенберга, необходимость изучения которой была обозначена математическим сообществом в соответствующих научных статьях, а с другой стороны, нильпотентные группы, которые также подходят под исходные мотивировки научного сообщества. Поскольку на момент начала исследования Артёма в литературе не было зафиксировано существенных продвижений в данном направлении, было решено сконцентрироваться на данной исследовательской задаче. Приведем аннотацию работы Артёма:

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «ЛитРес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на ЛитРес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.