

И. С. Алексеев  
А. Д. Смирнова  
Д. Н. Овсяницкий

---

**От занятий в Летней  
научной школе ЛНМО  
к созданию инженерных  
проектов и исследований  
в области математики  
и биологии**

*Сборник методических статей*



ФОНД  
ПРЕЗИДЕНТСКИХ  
ГРАНТОВ



**ЛНМО**

**Илья Алексеев**

**От занятий в Летней научной  
школе ЛНМО к созданию  
инженерных проектов  
и исследований в области  
математики и биологии.  
Сборник методических статей**

«Издательские решения»

**Алексеев И. С.**

От занятий в Летней научной школе ЛНМО к созданию инженерных проектов и исследований в области математики и биологии. Сборник методических статей / И. С. Алексеев — «Издательские решения»,

**ISBN 978-5-44-985861-0**

Лаборатория непрерывного математического образования ежегодно проводит Летнюю научную школу и научные семинары в течение учебного года. Сборник содержит методические наработки преподавателей ЛНМО, связанные с системным принципом организации проектной и исследовательской деятельности.

**ISBN 978-5-44-985861-0**

© Алексеев И. С.  
© Издательские решения

## Содержание

|                                                                                                                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Научные исследования школьников в области математики<br>и компьютерных наук. Опыт интеграции программ Летней научной<br>школы и Системы научных семинаров и спецкурсов ЛНМО | 6  |
| Взаимодействие ученика и научного руководителя                                                                                                                              | 8  |
| Подготовка теоретической базы для создания школьником<br>научного исследования                                                                                              | 9  |
| Подбор исследовательских задач                                                                                                                                              | 10 |
| Конец ознакомительного фрагмента.                                                                                                                                           | 12 |

**От занятий в Летней научной  
школе ЛНМО к созданию  
инженерных проектов и исследований  
в области математики и биологии  
Сборник методических статей**

**Илья Сергеевич Алексеев  
Анастасия Денисовна Смирнова  
Дмитрий Николаевич Овсяницкий**

*Редактор* Максим Анатольевич Клеверов

*Редактор* Мария Вячеславовна Чистякова

*Дизайнер обложки* Анастасия Денисовна Смирнова

© Илья Сергеевич Алексеев, 2020

© Анастасия Денисовна Смирнова, 2020

© Дмитрий Николаевич Овсяницкий, 2020

© Анастасия Денисовна Смирнова, дизайн обложки, 2020

ISBN 978-5-4498-5861-0

Создано в интеллектуальной издательской системе Ridero

# **Научные исследования школьников в области математики и компьютерных наук. Опыт интеграции программ Летней научной школы и Системы научных семинаров и спецкурсов ЛНМО**

## **Алексеев Илья Сергеевич**

Лаборант-исследователь  
Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ  
Преподаватель математического направления  
Летней научной школы ЛНМО  
Научный руководитель  
Системы научных семинаров  
и спецкурсов ЛНМО

Настоящая статья посвящена организации научно-исследовательской деятельности в области математики и программирования ребят, обучавшихся в Летней научной школе Лаборатории непрерывного математического образования и в Системе научных семинаров и спецкурсов ЛНМО и достигших значительных успехов в научной деятельности.

Создание школьником научного исследования можно разделить на несколько этапов, которые подразумевают подготовку теоретической базы, подбор и постановку исследовательской задачи, проведение исследовательского процесса, написание научной статьи и распространение полученных результатов путем публикации работы, и в итоге – выступления на научных конференциях и семинарах.

Этап теоретической подготовки, являясь одним из наиболее трудоемких, определяет тематику будущего исследования и предшествует началу исследовательского процесса. Предполагается, что необходимую теорию школьник осваивает на соответствующем спецкурсе. Например, ЛНМО проводит математическую смену Летней научной школы (ЛМШ), в рамках которой школьники 7—11 классов в течение трёх недель слушают курсы по математике и компьютерным наукам с последующей сдачей экзаменов. К чтению лекций приглашаются специалисты из соответствующих областей. Как правило, каждый ребенок прослушивает четыре курса, читающихся ежедневно. Для того, чтобы сделать процесс обучения в ЛМШ наиболее продуктивным, тематика курсов выбирается таким образом, чтобы установить фундамент в математическом образовании школьника. К примеру, будущие девятиклассники ЛНМО в ЛМШ помимо стандартного курса алгебры и анализа прослушивают курсы по основам линейной алгебры и теоретико-множественной топологии. Доступность продвинутых математических курсов для школьников обусловлена тем, что ученики ЛНМО уже в 7 и 8 классах осваивают математические основы, такие как теорию множеств и теорию групп. Тематика курсов для старшеклассников в ЛМШ имеет более специфический характер, поскольку предполагается, что старшеклассники имеют представление о предлагаемых научными руководителями темах будущего научного исследования. Последнее делает целесообразным организацию курсов, приносящих специализированные знания. Подразумевается, что подобные курсы имеют достаточно общий характер, являются полезными и интересными для школьников. В 2019 году в ЛМШ были прочитаны следующие курсы: «Теоретическая информатика», «Введение в алгебру и анализ», «Алгоритмы и структуры данных», «Введение в математику» (авторский курс), «Топология», «Теория вычислимости», «Введение в линейную алгебру», «Введение в неравенства», «Теория функций многих переменных», «Введение в тео-

рию групп», «Теория Галуа», «Введение в геометрическую топологию», «Современная теория чисел», «Теория категорий», «Многопоточное программирование». Последние пять из них можно отнести к списку тех, которые были включены в учебный план ЛМШ с расчётом на будущее использование в научных работах школьников.

Основной источник новых знаний для школьника в рамках Системы научных семинаров ЛНМО – это теоретические семинары (спецкурсы). Например, в 2019—2020 учебном году в ЛНМО были организованы следующие курсы: «Линейная алгебра», «Разработка интерфейсов», «Гомологическая алгебра», «Дифференциальные уравнения», «Введение в теорию групп», «Функциональный анализ», «Машинное обучение». Знания, которые предлагаются на теоретическом семинаре, необходимы для успешного участия школьников в исследовательских семинарах. Например, все дети (пять человек) после прохождения курса «Функциональный анализ» продолжили научную работу на одноимённом исследовательском семинаре и на семинаре «Геометрическая теория групп» с последующим выступлением на Балтийском научно-инженерном конкурсе.

Исследовательские семинары ЛНМО – это научные семинары, на которых школьники обсуждают исследовательские задачи по математике и компьютерным наукам, выступают с докладами по соответствующей тематике, объединяются для решения задач, изучают передовые результаты ученых. Именно на этих семинарах под надзором научного руководителя проводятся исследовательские процессы. Например, в 2019—2020 учебном году в ЛНМО были организованы следующие исследовательские семинары: «Вычислительная геометрия», «Семинар по решению задач Турнира юных математиков», «Топологическая теория графов», «Теория гомологий», «Введение в топологию», «Бесконечные группы», «Топология и геометрия поверхностей», «Алгебраическая теория полугрупп», «Алгебраическая топология», «Комбинаторика систем корней», «Геометрическая теория групп», «Функциональный анализ».

В статье будут описаны основные аспекты и стратегии ведения научного исследования, принятые на научных семинарах ЛНМО.

## **Взаимодействие ученика и научного руководителя**

Формат работы научного руководителя и ребенка во многом зависит от уровня подготовки последнего. В том случае, если ребёнок является начинающим, зависимым от своего руководителя исследователем в соответствующей области науки, научный руководитель должен давать тому четкие указания о том, что делать, когда и как. В таком формате руководителем назначаются конкретные цели и простые методы их достижения, а подход к предмету предполагается максимально строгим и организованным. В случае, если ребенок уже вовлечен в исследование, заинтересован в получении знаний и готов решать конкретные задачи, руководитель должен готовить ребенка к самостоятельности и помогать ему развивать свои навыки. В таком формате руководитель объясняет и обосновывает каждое задание, убеждает ребенка в его ценности, учитывает мнение ребенка. В отличие от предыдущего формата, в данном случае связь между ребёнком и научным руководителем является двусторонней. Предполагается, что каждый ребёнок проходит два этапа обучения, описанных выше. Взаимодействие ребенка и научного руководителя подразумевает регулярные встречи, обсуждение продвижений ребёнка в решении поставленных задач и установку конкретных временных сроков выполнения последних. Итого, основная задача научного руководителя – корректировать действия ребенка, обеспечивать его необходимыми знаниями, консультировать и направлять.

В рамках исследовательского семинара «Геометрическая теория групп» под руководством Руслана Тимуровича Магдиева проводились еженедельные занятия, на которых коллективы старшеклассников решали исследовательские задачи, относящиеся к одной и той же области математики. Среди ребят были как те, кто находился на первом этапе обучения и для кого научная работа была впервой, так и те, кто уже хорошо ориентировался в теории и был заинтересован в проведении собственного исследования. Стоит отметить, что последние помогали первым в освоении дисциплины, и такое взаимодействие способствовало повышению командного духа. Тем не менее, немаловажную роль играл авторитет Руслана Тимуровича, его навыки объяснения и донесения мысли, способность координирования работы ребят и корректирования направления их мыслей при решении исследовательских задач.

Допускается проведение дистанционных занятий. Например, специально для исследовательского семинара «Теория гомологий» руководителем были записаны видеолекции [4], которые позволили школьникам пройти экспресс-курс по теории векторных пространств, который является пререквизитом к теории гомологий. Материалы экспресс-курса обсуждались на дополнительных занятиях.

## **Подготовка теоретической базы для создания школьником научного исследования**

Как правило, научное исследование подразумевает специализацию, требующую дополнительных знаний из соответствующей области науки. Необходимая теоретическая база подготавливается руководителем и преподносится ребенку, например, в формате курса лекций или практических занятий. Последний формат подразумевает, что ключевые идеи и результаты школьником переоткрываются. Исследовательская задача может быть поставлена как до освоения основ дисциплины, так и после. Теоретический материал подбирается таким образом, чтобы, с одной стороны, освоить использование специальных методов и техник для решения задачи, а с другой стороны, чтобы для ребёнка открылась ясная картина того, как устроены основания соответствующей области науки, в чем состоят мотивировки исследования и его дальнейшие перспективы. Вынося в будущем результаты по проведенным исследованиям на защиту, школьник подтверждает, что он ознакомлен с сопутствующей теорией на должном уровне строгости. Задача руководителя, в частности, состоит в том, чтобы ознакомить ребёнка с современным состоянием исследуемого вопроса.

Так весной 2019 года Руслан Тимурович Магдиев предложил Артёму Семидетнову совместную работу, являющуюся продолжением его собственной школьной научной работы под названием «Геометрия геодезических в дискретной группе Гейзенберга», которая относится к теории групп и римановой геометрии. Участие в подобном исследовании предполагает серьезные теоретические пререквизиты, и даже для понимания постановки задачи от ребёнка требуется знание основ теории групп. Необходимую теоретическую базу Артем получил в Летней математической школе, прослушав курсы «Введение в теорию групп» и «Введение в геометрическую топологию». Знания, обретенные Артёмом на первом из них, позволили ему ознакомиться с результатами, полученными в прошлом Русланом Тимуровичем, и приступить к изучению более широкого класса объектов. Навыки работы с римановыми многообразиями, обретенные на занятиях по геометрической топологии, в будущем позволили Артёму обнаружить новый подход к описанию рассматриваемых объектов. Перечислим несколько понятий, которые были использованы в научном исследовании Артёма и были отработаны на семинаре «Геометрическая теория групп»: задание групп образующими и соотношениями, нильпотентные и разрешимые группы, дискретные изопериметрические задачи, римановы многообразия, однородные и изотропные геометрии, группы Ли.

Стоит выделить исследование десятиклассника Петра Барина «Структура сингулярных обобщенных функций с точечными носителями», выполненное под руководством Петра Алексеевича Куликова:

«Математическая физика изучает решение дифференциальных уравнений высших порядков. В частности, если рассмотреть линейный дифференциальный оператор, то подобрав нужные коэффициенты он может стать, например, оператором Лапласа. Мы изучили поведение решения линейного дифференциального уравнения на прямой при условии, что у решения есть не более чем степенная особенность в нуле. А именно, мы нашли другое решение для этого дифференциального оператора, которое не имеет особенностей, и нашли его связь с первым решением».

Необходимая теоретическая база осваивалась в течение всего 2019 года на следующих семинарах ЛНМО: «Теория меры и категорий», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ». Перечислим некоторые понятия, использованные в итоговой научной статье: дифференциальные уравнения, ряды Фурье, обобщенные функции и их регуляризация, меры Лебега и Стильеса.

## Подбор исследовательских задач

Исследовательские задачи, которые предлагаются детям, должны быть таковы, что задача – частично решена научным руководителем, при этом содержит части без какого-либо известного решения;

– доступна для ребёнка, то есть должна быть уверенность в том, что некоторая элементарная исследовательская работа может быть сделана.

– зачастую задача предполагает изучение новой теории.

Например, на семинаре «вычислительная геометрия» под руководством Бориса Алексеевича Золотова было проведено исследование, основанное на одной из задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

«Существует много различных характеристик фигур на плоскости, таких как диаметр и площадь, но можно заметить, что среди них нет ни одной простой и хорошо изученной характеристики, которая могла бы отличить широкие и длинные фигуры от фигур, которые такими не являются. Поэтому я изучила новую характеристику фигур на плоскости, которая называется миаметр».

Автор итогового решения (Дойникова Екатерина, ученица 8 класса) на Балтийском научно-инженерном конкурсе получила Диплом II степени и Специальную премию с работой «Миаметры». Другому ученику Бориса Алексеевича (Пакульневичу Константину, 9 класс) на основе знаний, полученных по результату прохождения курса «топология» ЛМШ, для которого специального класса объектов удалось улучшить передовой геометрический алгоритм, который обсуждался на семинаре «Вычислительная геометрия»:

«Работа основана на теореме Александрова и алгоритме Чена-Хана. Теорема Александрова дает достаточные и необходимые условия существования выпуклого многогранника (причем единственного) для заданной развертки. Из квадратов можно составить бесконечно много развёрток, удовлетворяющих условиям теоремы Александрова. Однако некоторые из этих развёрток оказываются изоморфны – а именно, что им соответствует один и тот же многогранник, с точностью до гомотетии. Более того, с использованием формулы Гаусса – Бонне несложно показать, что у каждого многогранника, получаемого при склейке квадратов, будет не более восьми вершин. В результате работы построен алгоритм проверки изоморфности склеек из квадратов. Алгоритм расширен для других правильных многоугольников».

Работа «Проверка изоморфности склеек из правильных многоугольников» была отмечена на Балтийском научно-инженерном конкурсе Дипломом лауреата премии учительского жюри. Перечислим несколько понятий, которые были использованы в исследовании и были отработаны на семинаре: Link-cut Trees, диаграммы Вороного, формула Гаусса-Бонне.

Ключевую роль при подборе задач играет работа с литературой. Новизна проблематики подразумевает, что научному сообществу неизвестно её полное решение. Под полнотой решения может, например, иметься в виду решение некоторой сверхзадачи, которая выбирается в качестве ориентира либо до начала исследования, либо в процессе исследования. Вопрос считается изученным научным сообществом, если либо имеется публикация (заметки, статьи, монографии, книги и т.п.), используя результаты которой, можно напрямую получить решение этой задачи, либо решение следует из результатов некоторой общей теории и хорошо известно специалистам. Имеется исключение из этого правила, связанное с тем, что ученые не всегда публикуют открытия, которые были получены ими в процессе исследования. Поэтому проверить на практике, была ли некоторая задача кем-либо решена, непросто, и для доказательства новизны проблематики необходимо как опубликовать на всеобщее обозрение результаты работы, так и привлекать к ней внимание научного сообщества. Это приводит как к необхо-

димости раннего обнаружения условий задачи, так и к последующей публикации решения ребёнка.

К примеру, источником некоторых научных работ, выполненных на исследовательском семинаре «Геометрическая теория групп», послужила недавно опубликованная книга [2] и сборник открытых задач [3], авторство которых принадлежит специалистам в соответствующих областях.

На семинаре «Теория гомологий» под руководством к.ф.-м. н. Сергея Олеговича Иванова было проведено исследование, результатом которого является обнаружение нового подхода к диагностике колоректального рака:

«Работа посвящена изучению гистологических изображений (WSI – Whole-Slide Imaging) при помощи методов топологического анализа данных. В частности, изображений рака толстой кишки. Основной характеристикой изображения для нас является персистентная энтропия, которая извлекается из нулевых симплициальных персистентных гомологий изображения. Наша цель – показать, что персистентная энтропия может быть полезна для компьютерной диагностики различных видов рака, в том числе колоректального. В этой работе нами реализован алгоритм вычисления персистентной энтропии, проведен анализ набора патчей WSI-изображений здоровой ткани и колоректального рака. В энтропии изображений здоровой ткани и рака были найдены существенные различия. Данные наблюдения могут стать основой нового метода диагностики рака».

Авторы решения (Каданцев Георгий и Сеницын Александр, ученики 11 класса) с работой «Персистентные гомологии и анализ гистологических данных» на Балтийском научно-инженерном конкурсе получили награды «Диплом I степени и Главная премия <<Совершенство как надежда>>» и «Главная премия (поездка на Regeneron ISEF)». Результаты общения со специалистами из комитета жюри подтвердили новизну решаемой задачи.

Существует несколько исследовательских направлений, актуальность которых постулируется научным сообществом. Среди них: установление связей между разными разделами науки, заполнение пробелов в научных публикациях и нахождение истины, поиск научных аномалий и другие. Стоит отметить, что исследовательская задача не обязана быть актуальной, однако, она должна вызывать интерес у ученых.

К примеру, ценность научной работы Артёма Семидетнова, которая называется «Геометрия свободных нильпотентных групп», состоит в том, что класс рассматриваемых в ней объектов включает в себя, с одной стороны, дискретную группу Гейзенберга, необходимость изучения которой была обозначена математическим сообществом в соответствующих научных статьях, а с другой стороны, нильпотентные группы, которые также подходят под исходные мотивировки научного сообщества. Поскольку на момент начала исследования Артёма в литературе не было зафиксировано существенных продвижений в данном направлении, было решено сконцентрироваться на данной исследовательской задаче. Приведем аннотацию работы Артёма:

## **Конец ознакомительного фрагмента.**

Текст предоставлен ООО «ЛитРес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на ЛитРес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.